MATHEMATISCHES INSTITUT DER
ALBERT-LUDWIGS-UNIVERSITÄT FREIBURG

Prof. Dr. E. Kuwert
Dr. R. Schätzle

12.1.1998

Analysis III
WS 1997/98
12.Übung

AUFGABE 43:
Für $f \in \mathrm{L}^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$ heißt $\hat{f} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$, mit $\hat{f}(\xi) := \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int\limits_{\mathbb{R}^n} f(x) \, \exp(-i\langle x, \xi\rangle)\mathrm{dx}$ die Fouriertransformierte von f . Zeigen Sie folgende Aussagen.

(a) $(\int\limits_{\mathbb{R}} e^{-x^2}\mathrm{dx})^2 = \int\limits_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-(\mathrm{x}^2+\mathrm{y}^2)}\mathrm{d(x,y)}$ und berechnen Sie das zweite Integral durch Transformation auf Polarkoordinaten.

(b) Berechnen Sie die Fouriertransformierte von $f(x) := \exp(-\frac{|x|^2}{2})$.

AUFGABE 44:
Es seien $f, g \in \mathrm{L}^1(\mathbb{R}^n)$. Zeigen Sie, daß für $\mathcal{L}^n$−fast alle $y \in \mathbb{R}^n$ die Funktion $(f * g)(y) := \int\limits_{\mathbb{R}^n} f(x)g(y-x)\mathrm{dx}$ definiert ist, und daß $f * g \in L^1(\mathbb{R}^n)$ gilt. Zeigen Sie weiter, daß $\widehat{f * g} = (2\pi)^{\frac{n}{2}} \hat{f}\hat{g}$.

AUFGABE 45:
Es sei $\Phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ eine stetige Abbildung, und μ ein endliches Radonmaß auf $\mathbb{R}^n$. Durch $\Phi_*(\mu)(A) := \mu(\Phi^{-1}(A))$ ist das Bildmaß definiert, siehe Aufagbe 2. Zeigen Sie für $\Phi_*(\mu)$−meßbares $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, daß $f \in \mathrm{L}^1(\Phi_*(\mu))$ genau dann, wenn $f \circ \Phi \in \mathrm{L}^1(\mu)$. Verifizieren Sie in diesem Fall

$$\int f \mathrm{d}\Phi_*(\mu) = \int \mathrm{f} \circ \Phi \mathrm{d}\mu.$$

Was besagt der Transformationssatz über das Bildmaß eines Diffeomorphismus ?

AUFGABE 46:
Berechnen Sie folgende Integrale.

(a) Der Schwerpunkt einer meßbaren, beschränkten Menge $B \subset \mathbb{R}^n$, $\mathcal{L}^n(B) \neq 0$, ist gegeben durch

$$\bar{x} := \frac{1}{\mathcal{L}^n(B)} \int\limits_B x \mathrm{dx}.$$

Zeigen Sie, daß $\bar{x}$ das Integral $I(y) := \int\limits_B |x-y|^2 \mathrm{dx}$ minimiert. Berechnen Sie den Schwerpunkt des Kugeloktanten $B := \{(x,y,z) \in \overline{B_1(0)} \mid x,y,z \geq 0 \}$.

(b) Es sei $B \subset \mathbb{R}^2$, wie in (a). Betrachten Sie $A := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid (\sqrt{x^2+y^2}, z) \in B \}$. Zeigen Sie

$$\mathcal{L}^3(A) = 2\pi\bar{y}\mathcal{L}^2(B),$$

wobei $(\bar{y}, \bar{z})$ der Schwerpunkt von B ist.

(c) $\int\limits_S x^n \, y^m \mathrm{d(x,y)}$, wobei $S = [(0,0),(0,1),(1,0)]$ der Einheitssimplex ist, siehe Aufgabe 42.

Vergessen Sie bitte nicht, Ihren Namen und die Nummer Ihrer Übungsgruppe auf Ihre Lösungsblätter zu schreiben. Abgabetermin ist Montag, 19.1.1998, von 14^{00} *Uhr bis* 14^{10} *Uhr.*