MATHEMATISCHES INSTITUT DER
ALBERT-LUDWIGS-UNIVERSITÄT FREIBURG

Prof. Dr. E. Kuwert
Dr. R. Schätzle

19.1.1998

Analysis III
WS 1997/98
13.Übung

AUFGABE 47:
Betrachten Sie auf $U \subset I\!R^n$ eine Riemannsche Metrik $g(x)(X,Y) = \varphi(x)^2\langle X,Y\rangle$ mit $\varphi \in \mathrm{C}^2(\mathrm{U}, I\!R^+)$. Zeigen Sie folgende Aussagen.

(i) $\Delta_g u = \frac{1}{\varphi^2}(\Delta u + \frac{n-2}{\varphi}\langle grad\ u, grad\ \varphi\rangle)$.

(ii) $\Delta(\varphi^{\frac{n-2}{2}}) = 0 \Rightarrow \Delta(\varphi^{\frac{n-2}{2}}u) = \varphi^{\frac{n+2}{2}}\Delta_g u$.

(iii) Ist $\Phi : U \to V,\ \Phi(x) = \frac{x}{|x|^2}$, und $v \in \mathrm{C}^2(\mathrm{V})$, so gilt

$$(\Delta v)\circ\Phi = |x|^{2+n}\Delta(|x|^{2-n}(v\circ\Phi)).$$

Insbesondere: wenn v harmonisch ist, so ist $|x|^{2-n}(v\circ\Phi)$ auch harmonisch.

AUFGABE 48:
Es sei $B_r := \{x \in I\!R^3 \ :\ |x| < r\ \}$ und $\mu \in \mathrm{L}^1(\mathrm{B_R} \sim \mathrm{B}_\varrho, I\!R^+)$ für $0 < \varrho < R$ eine rotationssymmetrische Massenverteilung, d.h. $\mu(Tx) = \mu(x)$ für alle $T \in SO(I\!R^3)$. Zeigen Sie

$$\int\limits_{B_R\sim B_\varrho} \frac{\mu(y)}{|x-y|}\mathrm{dy} = \begin{cases} konstant & \text{falls } |x| < \varrho, \\ \frac{m}{|x|} & \text{falls } |x| > R. \end{cases}$$

Dabei ist $m = \int\limits_{B_R\sim B_\varrho} \mu(y)\mathrm{dy}$ die Gesamtmasse.

AUFGABE 49: (Elliptische Koordinaten)
Es sei $\Phi(u,v) := (\alpha\, cosh(u) cos(v), \alpha\, sinh(u)\sin(v)),\ \alpha > 0$. Bestimmen Sie maximale offene Mengen, auf denen Φ ein Diffeomorphismus ist, und geben Sie die Umkehrabbildung an. Beschreiben Sie die Mengen $u = konstant$ und $v = konstant$.

(i) Zeigen Sie, daß Φ konform ist, und berechnen Sie Gradient, Divergenz und Laplace in den Koordinaten von Φ .

(ii) Die Funktion f sei auf den konfokalen Ellipsen $E := \{(x,y) \mid \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1\ \},\ a^2 - b^2 = \alpha^2$, konstant. Wie vereinfacht sich das Integral $\int\limits_{I\!R^2} f(x,y)\mathrm{d(x,y)}$?

AUFGABE 50: (Lemma von Sard)
Es sei $\emptyset \neq U \subset I\!R^n$ offen und $\Phi \in \mathrm{C}^1(\mathrm{U}, I\!R^n)$. Zeigen Sie, daß das Bild der kritischen Punkte von Φ eine Nullmenge ist, d.h.

$$\mathcal{L}^n(\Phi\{x \in U \mid det(d\Phi(x)) = 0\ \}) = 0.$$

Vergessen Sie bitte nicht, Ihren Namen und die Nummer Ihrer Übungsgruppe auf Ihre Lösungsblätter zu schreiben. Abgabetermin ist Montag, 26.1.1998, von 14^{00} *Uhr bis* 14^{10} *Uhr.*