MATHEMATISCHES INSTITUT DER
ALBERT-LUDWIGS-UNIVERSITÄT FREIBURG

Prof. Dr. E. Kuwert
Dr. R. Schätzle

26.1.1998

Analysis III
WS 1997/98
14.Übung

AUFGABE 51:
Es sei $c(t) = r(t)(\cos(\varphi(t)), \sin(\varphi(t)))$, $t \in [a,b]$, eine stetig differenzierbare Kurve im $\mathbb{R}^2$ in Polarkoordinaten, $r > 0$, $\varphi' > 0$, $0 < \varphi < 2\pi$. Zeigen Sie, daß die vom Ortsvektor $c(t)$ überstrichene Fläche durch

$$\frac{1}{2}\int_a^b r(t)^2\ \varphi'(t)\mathrm{dt}$$

gegeben ist.

AUFGABE 52:
Es sei $R := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid y^2 + z^2 = f(x)^2,\ a \le x \le b\ \}$ die von dem Graphen $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = f(x),\ a \le x \le b\ \}$, mit $f \in \mathrm{C}^1([\mathrm{a,b}])$, $\mathrm{f} > 0$, erzeugte Rotationsfläche. Zeigen Sie

$$\mathcal{H}^2(R) = 2\pi \int_a^b f(x)\sqrt{1 + f'(x)^2}\mathrm{dx}.$$

AUFGABE 53:
Betrachten Sie den Zylindermantel $Z := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2 = 1,\ 0 \le z \le 1\ \}$ mit der Parametrisierung $\Phi(\varphi, z) := (\cos(\varphi), \sin(\varphi), z)$, $\varphi \in \mathbb{R}$, $z \in [0,1]$. Für $M, N > 0$ unterteile man den Parameterbereich durch die Strecken $\{z = \frac{k}{2N}\}, k = 0, \ldots, 2N$, und diese durch die Punkte $\{(\frac{2\pi l}{M}, \frac{k}{2N}) \mid l \in \mathbb{Z}\ \}$ für gerade k und durch $\{\frac{2\pi(l+\frac{1}{2})}{M}), \frac{k}{2N}) \mid l \in \mathbb{Z}\ \}$ für ungerade k. Nun betrachte man die Dreiecke, deren Eckpunkte aus den Bildern unter Φ zweier benachbarter Punkten der Strecken $\{z = \frac{k}{2N}\}$ und des Bildes des dazwischenliegenden Punktes auf der Strecke darüber oder darunter bestehen, als Approximation von Z. Vergleichen Sie den Gesamtflächeninhalt der Dreiecke mit dem Flächeninhalt des Zylindermantels für M, N groß.

AUFGABE 54:

(a) Es sei $U \subset \mathbb{R}^{n-1}$ offen und M der Graph einer glatten Funktion $f : U \to \mathbb{R}$ mit Normalen $\nu = \frac{(-gradf,1)}{\sqrt{1+|gradf|^2}}$. Für $A \subset\subset U$, meßbar, $r > 0$ sei $N = \{(x, f(x)) \mid x \in A\ \}$ und $N_r = \{(x, f(x)) + t\nu(x) \mid x \in A,\ |t| < r\ \}$. Zeigen Sie

$$\lim_{r \downarrow 0} \frac{1}{2r}\mathcal{L}^n(N_r) = \mathcal{H}^{n-1}(N).$$

(b) $M \subset \mathbb{R}^n$ sei eine kompakte, glatte (n-1)-dimensionale Untermannigfaltigkeit und $U_r(M) := \{x \in \mathbb{R}^n \mid d(x, M) < r\ \}$. Zeigen Sie

$$\lim_{r \downarrow 0} \frac{1}{2r}\mathcal{L}^n(U_r(M)) = \mathcal{H}^{n-1}(M).$$

Vergessen Sie bitte nicht, Ihren Namen und die Nummer Ihrer Übungsgruppe auf Ihre Lösungsblätter zu schreiben. Abgabetermin ist Montag, 2.2.1998, von 14^{00} *Uhr bis* 14^{10} *Uhr.*