MATHEMATISCHES INSTITUT DER
ALBERT-LUDWIGS-UNIVERSITÄT FREIBURG

Prof. Dr. E. Kuwert
Dr. R. Schätzle

2.2.1998

Analysis III
WS 1997/98
15.Übung

AUFGABE 55:
Eine alternierende k-Form $\omega \in \Lambda^k(V)$ heißt einfach oder zerlegbar, falls sie als Produkt von 1-Formen darstellbar ist. Zeigen Sie, daß für $dim(V) \leq 3$ jede k-Form einfach ist. Zeigen Sie weiter, daß $dx^1 \wedge dx^2 + dx^3 \wedge dx^4 \in \Lambda^2(I\!R^4)$ nicht einfach ist.

AUFGABE 56:
Es seien $c_i : I \to I\!R^p,\ i = 0,1$ zwei C$^2-$Wege, die sich durch eine C^2-Homotopie verbinden lassen, d.h. $H(s,i) = c_i(s),\ H(0,t) = c_i(0),\ H(1,t) = c_i(1)$. Zeigen Sie für $\omega \in \Omega^1(I\!R^p)$

$$\int_{c_1} \omega - \int_{c_0} \omega = \int\limits_{[0,1]^2} H^* d\omega.$$

AUFGABE 57:
Es sei V ein p-dimensionaler, orientierter euklidischer Raum. Ein Skalarprodukt ist auf $\Lambda(V)$ definiert durch

$$\langle \omega, \sigma \rangle = \sum_{1 \leq \alpha_1 < \ldots a_n \leq p} \omega(e_{\alpha_1}, \ldots, e_{\alpha_n}) \sigma(e_{\alpha_1}, \ldots, e_{\alpha_n})$$

für eine beliebige Orthonormalbasis $e_1, \ldots, e_p$, falls $\omega, \sigma \in \Lambda^n(V)$, und $\langle \omega, \sigma \rangle = 0$, falls ω und σ verschiedene Grade haben. Zeigen Sie

$$\langle \omega_1 \wedge \ldots \wedge \omega_n, \sigma_1 \wedge \ldots \wedge \sigma_n \rangle = det(\langle \omega_i, \sigma_j \rangle)$$

für $\omega_1, \ldots, \omega_n, \sigma_1, \ldots, \sigma_n \in \Lambda^1(V)$.
Der Hodgeoperator $* : \Lambda(V) \to \Lambda(V)$ ist die lineare Abbildung, die folgenden Eigenschaften für eine gegebene positive Orthonormalbasis $e_1, \ldots, e_p \in V$ und ihre duale Basis $dx^1, \ldots, dx^p \in V^*$, d.h. $dx^i(e_j) = \delta_{ij}$, erfüllt:

$$\begin{aligned} *(1) &= dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^p, \\ *(dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^p) &= 1, \\ *(dx^\alpha) &= sgn(\alpha) dx^{\hat{\alpha}}, \text{ für } \alpha \in I(n,p). \end{aligned}$$

Zeigen Sie folgende Aussagen.

(i) $\langle \omega, \sigma \rangle = *(\omega \wedge *\sigma) = *(\sigma \wedge *\omega)$ für $\omega, \sigma \in \Lambda^n(V)$.

(ii) Es gilt $* : \Lambda^n(V) \to \Lambda^{p-n}(V)$ und $** = (-1)^{n(p-n)} : \Lambda^n(V) \to \Lambda^n(V)$.

(iii) $* : \Lambda(V) \to \Lambda(V)$ ist orthogonal und unabhängig von der Wahl der positiven Orthonormalbasis $e_1, \ldots, e_p \in V$.

AUFGABE 58:
Es seien $E, B : I\!R^3 \to I\!R^3$ glatte Vektorfelder. Zeigen Sie folgende Aussagen.

(i) $B \lfloor dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3 = \sum\limits_{i=1}^{3} (-1)^{i-1} B^i dx^{\hat{i}}$.

(ii) $d(\sum\limits_{i=1}^{3} E_i dx^i) = rot E \lfloor dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3$.

(iii) $d(B \lfloor dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3) = div B dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3$.

(iv) Nun seien $E, B : I\!R \times I\!R^3 \to I\!R^3$ durch $dA = (\sum\limits_{i=1}^{3} E_i dx^i) \wedge dt + B \lfloor dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3$ gegeben, wobei $A = A_0 dt + \sum\limits_{i=1}^{3} A_i dx^i$ eine 1-Form ist. Folgern Sie aus $d^2 A = 0$ die Maxwellschen-Gleichungen

$$div\ B = 0, \quad \partial_t B + rot\ E = 0.$$

Vergessen Sie bitte nicht, Ihren Namen und die Nummer Ihrer Übungsgruppe auf Ihre Lösungsblätter zu schreiben. Abgabetermin ist Montag, 9.2.1998, von 14^{00} *Uhr bis* 14^{10} *Uhr.*