MATHEMATISCHES INSTITUT DER
ALBERT-LUDWIGS-UNIVERSITÄT FREIBURG

Prof. Dr. E. Kuwert
Dr. R. Schätzle

12.2.1998

Analysis III
WS 1997/98
16.Übung

AUFGABE 59:
Geben Sie eine geschlossene n-1-Form auf $I\!R^n - \{0\}$ an, die nicht exakt ist.

AUFGABE 60:
Befindet sich ein Körper Ω in einer Flüssigkeit der konstanten Dichte $\varrho > 0$, die den unteren Halbraum $H = \{x \in I\!R^3 \mid \langle x, e_3 \rangle < 0 \}$ ausfüllt, so wirkt auf $\partial\Omega$ an der Stelle x die Kraft $F(x) = \varrho x^3 \nu(x)$, wobei ν die äussere Normale ist. Berechnen Sie die Kräftesumme $F = \int_\Omega F(x) d\mathcal{H}^2(x)$ und begründen Sie das Archimedische Prinzip.

AUFGABE 61:
Berechnen Sie für einen symmetrischen Endomorphismus das Integral $\int_{S^{n-1}} \langle Ax, x \rangle d\mathcal{H}^{n-1}$.

AUFGABE 62:
Es sei Ω beschränkt mit glattem Rand und $u \in C^2(\overline{\Omega})$, $u \not\equiv 0$ eine Lösung von $-\Delta u = \lambda u$. Zeigen Sie $\lambda > 0$.

AUFGABE 63:
Zeigen Sie, daß die Karte $f(\theta, \varphi) = (\sin(\theta)\cos(\varphi), \sin(\theta)\sin(\varphi), \cos(\theta))$ an S^2 mit der durch die äussere Normale $\nu(y) = \frac{y}{|y|}$ induzierten Orientierung verträglich ist.

AUFGABE 64:
Es sei X ein Vektorfeld auf $I\!R^n$, dessen Koeffizienten homogene Polynome vom Grad m sind. Zeigen Sie, daß für gerades m gilt: $\int_{S^{n-1}} X \lfloor dv = 0$.

AUFGABE 65:
Es sei $G \subset\subset I\!R^2 \cong \mathbb{C}$, $G' := G \sim \{z_1, \ldots, z_m\}$, $z_i \in G$ und $\omega = f(z)dz$ holomorph auf G' und stetig differenzierbar auf einer offenen Umgebung von $\overline{G} \sim \{z_1, \ldots, z_m\}$. Zeigen Sie

$$\int_{\partial G} f(z)dz = 2\pi i \sum_{j=1}^{m} Res_{z_j}(f),$$

wobei das Residuum $Res_{z_j}(f)$ von f bei z_j durch den Koeffizieten von $\frac{1}{z}$ der Laurent-Reihe von f um z_j gegeben ist, d.h. $Res_{z_j}(f) = a_{-1}^{(j)}$, wenn

$$f(z) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} a_k^{(j)} (z - z_j)^k \quad \text{in } B_\delta(z_j) - \{z_j\}$$

und $B_\delta(z_j) \subset G$.

AUFGABE 66:
Es sei $\Omega \subset I\!R^n$ offen und beschränkt mit glattem Rand, und ω die Raumwinkelform, d.h. $\omega = \frac{x}{|x|^n} \lfloor dv$. Zeigen Sie folgende Aussagen.

(i)

$$\int_{\partial\Omega} \omega = \begin{cases} \omega_{n-1} & \text{falls } 0 \in \Omega \\ 0 & \text{falls } 0 \notin \overline{\Omega}. \end{cases}$$

(ii) Ist $D \subset \partial\Omega$ ein Bereich, so daß die Abbildung $p : D \to S^{n-1}$, $p(x) := \frac{x}{|x|}$ injektiv ist und vollen Rang hat, so gilt

$$\mathcal{H}^{n-1}(p(D)) = \int_D \omega.$$

Keine Abgabe