MATHEMATISCHES INSTITUT DER
ALBERT-LUDWIGS-UNIVERSITÄT FREIBURG

Prof. Dr. E. Kuwert
Dr. R. Schätzle

20.10.1997

Analysis III
WS 1997/98
2.Übung

AUFGABE 5:
Es sei μ ein endliches Maß auf X . $\mathcal{M}$ bezeichne die Menge der meßbaren Mengen von μ versehen mit der Äquivalenzrelation $A \sim B :\Leftrightarrow \mu(A \triangle B) = 0$ für $A, B \in \mathcal{M}$. Die Menge der Äquivalenzklassen sei $\tilde{\mathcal{M}} := \mathcal{M}/\sim$. Für $[A], [B] \in \tilde{\mathcal{M}}$ sei $\varrho([A],[B]) := \mu(A \triangle B)$, wobei $A \triangle B$ die symmetrische Differenz von Mengen bezeichnet. Zeigen Sie folgende Aussagen.

(a) ϱ ist wohldefiniert und $(\tilde{\mathcal{M}}, \varrho)$ ist ein vollständiger, metrischer Raum.

(b) Die Abbildungen $\tilde{\mathcal{M}} \times \tilde{\mathcal{M}} \to \tilde{\mathcal{M}}$, $([A],[B]) \mapsto [A \cup B], [A \triangle B], [A \cap B]$ sind wohldefiniert und stetig.

AUFGABE 6:
Es sei μ ein Maß auf X , und $f : X \to Y$. Zeigen Sie, daß $\nu(B) := \mu(f^{-1}(B))$ ein Maß auf Y definiert. ν ist das Bild-Maß von μ und wird mit $f_*(\mu)$ bezeichnet. Zeigen Sie weiter, wenn μ endlich und Borel-regulär ist, daß eine Menge $B \subset Y$ genau dann $\nu-$meßbar ist, wenn $f^{-1}(B)$ $\mu-$meßbar ist.
(Hinweis: Beweisen Sie, daß $A, B \subset X$ meßbar sind, falls $A \cup B$ meßbar, $\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B)$ und μ endlich und Borel-regulär ist.)

AUFGABE 7:
Zeigen Sie folgende Aussagen für das Hausdorff-Maß .

(a) $\mathcal{H}^0$ ist das Zählmaß . Dabei sei $0^0 := 1$.

(b) Es gilt $\mathcal{L}^1 = \mathcal{H}^1$ auf $\mathbb{R}^1$.

(c) $\mathcal{H}^m(\mathbb{R}^n) = 0$ für $m > n$.

(d) $\mathcal{H}^m(\lambda A) = \lambda^m \mathcal{H}^m(A)$ für $\lambda > 0$, und $\mathcal{H}^m(M(A)) = \mathcal{H}^m(A)$ für $M(x) = Tx + b$ und $T \in O(n)$.

AUFGABE 8:
Man zeige für den Quader $Q := \{x \in \mathbb{R}^n \ : \ a_k \leq x_k \leq b_k \}$, daß $\mathcal{L}^n(Q) = \prod_{k=1}^n (b_k - a_k)$.

Vergessen Sie bitte nicht, Ihren Namen und die Nummer Ihrer Übungsgruppe auf Ihre Lösungsblätter zu schreiben. Abgabetermin ist Montag, 27.10.1997, von 14^{00} *Uhr bis* 14^{10} *Uhr.*