MATHEMATISCHES INSTITUT DER
ALBERT-LUDWIGS-UNIVERSITÄT FREIBURG

Prof. Dr. E. Kuwert
Dr. R. Schätzle

27.10.1997

Analysis III
WS 1997/98
3.Übung

AUFGABE 9:
Es sei μ ein Borelreguläres, translationsinvariantes Maß auf $\mathbb{R}^n$ mit $0 < \alpha = \mu([0,1]^n) < \infty$. Zeigen Sie $\mu = \alpha \mathcal{L}^n$.

AUFGABE 10:
Es sei $A \subset \cup_{j=1}^N K_j$ eine Überdeckung einer Menge A mit endlich vielen kompakten Kugeln $K_j = \overline{B_{r_j}(x_j)}$. Bestimmen Sie eine paarweise disjunkte Teilfamilie $(K_j)_{j \in J}$, also $K_j \cap K_{j'} = \emptyset$ für $j, j' \in J$ und $j \neq j'$, für die außerdem gilt:

$$A \subset \cup_{j \in J} \overline{B_{5r_j}(x_j)}.$$

AUFGABE 11:
Gegeben seien abgeschlossene Kugeln $K_0,\ K_1, \ldots K_N \subset \mathbb{R}^n,\ K_i = \{x\ :\ |x - x_i| \leq 1\ \}$. Es gelte $K_i \cap K_0 \neq \emptyset$, sowie $x_i \notin K_j$ für $1 \leq i, j \leq N,\ i \neq j$. Zeigen Sie, daß die Zahl N der Kugeln eine nur von n abhängige obere Schranke hat.

AUFGABE 12:
Es sei μ ein Radonmaß auf $\mathbb{R}^n$. Untersuchen Sie die Stetigkeitseigenschaften von $\theta : \mathbb{R}^n \times [0, \infty[\to \mathbb{R},\ \theta(x,r) := \mu(\{y\ :\ |y - x| < r\ \}$. Zeigen Sie insbesondere, daß $\theta(.,r)$ für festes $r > 0$ meßbar ist, und daß $\theta(x,.)$ für festes x bis auf abzählbar viele Ausnahmepunkte stetig ist.
(Hinweis: f heißt ober- bzw. unterhalbstetig genau dann, wenn $f(x_0) \geq \limsup_{x \to x_0} f(x)$ *bzw.* $f(x_0) \leq \liminf_{x \to x_0} f(x)$.)

AUFGABE 13:
Es sei μ ein Maß auf X mit $\mu(X) < \infty$. Die Folge $f_k : X \to [-\infty, \infty]$ konvergiere punktweise fast überall gegen $f : X \to \mathbb{R}$. Zeigen Sie, daß $\mu(\{x\ :\ |f_k(x) - f(x)| \geq \varepsilon\ \}) \to 0$ für $\varepsilon > 0$ und $k \to \infty$.

Bearbeiten Sie vier der Aufgaben. Vergessen Sie bitte nicht, Ihren Namen und die Nummer Ihrer Übungsgruppe auf Ihre Lösungsblätter zu schreiben. Abgabetermin ist Montag, 3.11.1997, von 14^{00} *Uhr bis* 14^{10} *Uhr.*