MATHEMATISCHES INSTITUT DER
ALBERT-LUDWIGS-UNIVERSITÄT FREIBURG

Prof. Dr. E. Kuwert
Dr. R. Schätzle

3.11.1997

Analysis III
WS 1997/98
4.Übung

AUFGABE 14: (Satz von Vitali)
Es sei μ ein Maß auf $I\!R^n$, und $f_k \in \mathrm{L}^1(\mu)$ konvergieren $\mu-$fast-überall gegen f. Zeigen Sie, daß $f \in \mathrm{L}^1(\mu)$ und $f_k \to f$ in $\mathrm{L}^1(\mu)$ genau dann, wenn die folgenden Bedingungen erfüllt sind:

(i) Für beliebiges $\varepsilon > 0$ gibt es eine meßbare Menge $A_\varepsilon \subset I\!R^n$ mit $\mu(I\!R^n - A_\varepsilon) < \infty$ und $\sup\limits_{k \in I\!N} \int\limits_{A_\varepsilon} |f_k| \mathrm{d}\mu < \varepsilon$.

(ii) Für beliebiges $\varepsilon > 0$ gibt es ein $\delta > 0$, so daß $\sup\limits_{k \in I\!N} \int\limits_{E} |f_k| \mathrm{d}\mu < \varepsilon$ für alle meßbaren Mengen $E \subset I\!R^n$ mit $\mu(E) < \delta$.

(Hinweis: Verwenden Sie den Satz von Egoroff. Für die Rückrichtung zeigen Sie (ii) zuerst für f durch Approximation mit Hilfe des Satzes von Levi oder Lebesgue.)

AUFGABE 15:
Es sei μ ein Radonmaß auf $I\!R^n$, und $f \in \mathrm{L}^1(\mu)$. Zeigen Sie, daß durch $J_f(g) := \int fg\mathrm{d}\mu$ ein stetiges lineares Funktional auf $\mathrm{C}^0_\mathrm{c}(I\!R^\mathrm{n})$ mit $\| J_f \| = \| f \|_{\mathrm{L}^1(\mu)}$ definiert ist. Dabei ist

$$\| J_f \| := \sup\{ |J_f(g)| \mid g \in \mathrm{C}^0_\mathrm{c}(I\!R^\mathrm{n}), |\mathrm{g}| \leq 1 \}.$$

(Hinweis: Approximieren Sie $sgn(f) = 1$ für $f > 0$ und $= -1$ für $f < 0$ mit dem Satz von Lusin.)

AUFGABE 16:
Es sei $f : I\!R^n \to I\!R$ meßbar mit $|f(x)| \leq \min(1, \frac{C}{|x|^{n+\alpha}})$ für $\alpha > 0$. Zeigen Sie, daß $f \in \mathrm{L}^1(I\!R^\mathrm{n})$.

AUFGABE 17:
Für $n \in I\!N$ sei das n-te Hermitepolynom durch

$$H_n(x) := (-1)^n \exp(x^2) \; (\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dx}})^n \exp(-x^2)$$

definiert. Zeigen Sie, daß $H_n \in \mathrm{L}^2(\mu)$ und $\int\limits_{I\!R} \mathrm{H_n H_m d}\mu = 0$ für $n \neq m$, wobei $\mu := \mathcal{L}^1 \lfloor \exp(-x^2)$.
(Hinweis: Zeigen Sie zuerst die Identität $H_n' = 2nH_{n-1}$ und damit $(\exp(-x^2)H_n')' + 2n\exp(-x^2)H_n = 0$.)

AUFGABE 18:
Zeigen Sie durch wiederholte Produktintegration

$$\int\limits_0^{\sqrt{n}} (1 - \frac{t^2}{n})^n \mathrm{dt} = \frac{2\ 4 \cdots 2\mathrm{n}}{1\ 3 \cdots (2\mathrm{n}-1)} \frac{\sqrt{\mathrm{n}}}{2\mathrm{n}+1}.$$

Schließen Sie daraus mit dem Wallis-Produkt, siehe z.B. Skript Analysis I S. 155,

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2} \mathrm{dt} = \sqrt{\pi}.$$

Bearbeiten Sie vier der fünf Aufgaben. Vergessen Sie bitte nicht, Ihren Namen und die Nummer Ihrer Übungsgruppe auf Ihre Lösungsblätter zu schreiben. Abgabetermin ist Montag, 10.11.1997, von 14^{00} *Uhr bis* 14^{10} *Uhr.*