MATHEMATISCHES INSTITUT DER
ALBERT-LUDWIGS-UNIVERSITÄT FREIBURG

Prof. Dr. E. Kuwert
Dr. R. Schätzle

10.11.1997

Analysis III
WS 1997/98
5.Übung

AUFGABE 19: (Jensen Ungleichung)
Es sei μ ein Maß auf $I\!R^n$, mit $\mu(I\!R^n) < \infty$, $f \in \mathrm{L}^1(\mu)$ und $\Phi : I\!R \to I\!R$ stetig und konvex. Zeigen Sie

$$\Phi(⨍ f \mathrm{d}\mu) \leq ⨍ \Phi(\mathrm{f}) \mathrm{d}\mu,$$

wobei das zweite Integral möglicherweise $= +\infty$ ist.
(Hinweis: Zeigen Sie, daß für $c = ⨍ f \mathrm{d}\mu$ ein $\alpha \in I\!R$ existiert mit $\Phi(x) \geq \Phi(c) + \alpha(x-c)$.)

AUFGABE 20:
Es sei μ ein Maß auf $I\!R^n$, $1 \leq p < r < q \leq \infty$ und $f \in \mathrm{L}^\mathrm{p}(\mu) \cap \mathrm{L}^\mathrm{q}(\mu)$. Zeigen Sie, daß $f \in \mathrm{L}^\mathrm{r}(\mu)$. Ist $f \in \mathrm{L}^1(\mu)$ bzw. $\mathrm{f} \in \mathrm{L}^\infty(\mu)$, falls $\liminf_{p \downarrow 1} \| f \|_{\mathrm{L}^\mathrm{p}(\mu)} < \infty$ bzw. $\liminf_{p \uparrow \infty} \| f \|_{\mathrm{L}^\mathrm{p}(\mu)} < \infty$?

AUFGABE 21:
Es sei $\Phi(t) := \int\limits_0^\infty \exp(-tx) \frac{\sin(x)}{x} \mathrm{dx}$ für $t > 0$. Zeigen Sie folgende Aussagen.

(i) $\Phi'(t) = -\frac{1}{1+t^2}$.

(ii) $\lim\limits_{t \to \infty} \Phi(t) = 0$.

(iii) $\lim\limits_{r \to \infty} \int\limits_0^r \frac{\sin(x)}{x} \mathrm{dx} = \frac{\pi}{2}$.

(Hinweis: Zeigen Sie für (iii), daß $| \int\limits_r^\infty \exp(-tx) \frac{\sin(x)}{x} \mathrm{dx}| \leq \frac{\mathrm{C}}{\mathrm{r}}$.)

AUFGABE 22:
Es sei $I := [-\frac{L}{2}, \frac{L}{2}]$. Beweisen Sie für $f \in \mathrm{C}^1(\mathrm{I})$ die Poincaré-Ungleichung

$$⨍_I u^2 \mathrm{dx} \leq (⨍_I \mathrm{udx})^2 + \mathrm{CL}^2 ⨍_I (\mathrm{u}')^2 \mathrm{dx},$$

mit einer von u unabhängigen Konstanten C .

Vergessen Sie bitte nicht, Ihren Namen und die Nummer Ihrer Übungsgruppe auf Ihre Lösungsblätter zu schreiben. Abgabetermin ist Montag, 17.11.1997, von 14^{00} Uhr bis 14^{10} Uhr.