MATHEMATISCHES INSTITUT DER
ALBERT-LUDWIGS-UNIVERSITÄT FREIBURG

Prof. Dr. E. Kuwert
Dr. R. Schätzle

17.11.1997

Analysis III
WS 1997/98
6.Übung

AUFGABE 23:
Es sei H ein reeller Hilbertraum, also vollständig bezüglich der Skalarproduktnorm $\| \, . \, \| = \sqrt{\langle .,. \rangle}$. Eine Menge $S = \{u_j \mid j \in J\} \subset H$ mit $\langle u_i, u_j \rangle = \delta_{ij}$ heißt Orthonormalsystem. Zeigen Sie folgende Aussagen.

(i) $\sum\limits_{j \in J} \langle x, u_j \rangle^2 \leq \| x \|^2$ für alle $x \in H$.

(ii) $\lim\limits_{k \to \infty} \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(kx) dx = 0$ für alle $f \in \mathrm{L}^2(-\pi, \pi)$.

(iii) Folgende Aussagen sind äquivalent:

(a) Für alle $x \in H$ gilt $x = \sum\limits_{j \in J} \langle x, u_j \rangle u_j$.

(b) Für alle $x \in H$ gilt $\| x \|^2 = \sum\limits_{j \in J} \langle x, u_j \rangle^2$.

(c) $S^\perp := \{x \in H \mid \langle x, u_j \rangle = 0 \text{ für alle } j\} = \{0\}$.

AUFGABE 24:
Die Funktion $u \in C^2([0,\infty) \times I\!R/L)$ beschreibe die Stoffkonzentration eines Diffusionsvorgangs in einem Ring der Länge L , $I := [0, L]$. Dann gilt auf $[0,\infty) \times I\!R/L$ die Diffusions- oder Wärmeleitungsgleichung $u_t = u_{xx}$.

(i) Bestimmen Sie spezielle Lösungen durch den Separationsansatz $u(t,x) = v(t)w(x)$.

(ii) Zeigen Sie allgemein, daß der Mittelwert $u_I := ⨍_I u(t,x) dx$ zeitlich konstant ist.

(iii) Weisen Sie nach, daß $Q(t) := ⨍_I |u(t,x) - u_I|^2 dx$ exponentiell gegen Null geht. (siehe Aufgabe 22).

AUFGABE 25:

Es sei $f \in \mathrm{L}^2(0,\infty)$, und $F(x) := ⨍_0^x f(t) dt$. Zeigen Sie die Hardy-Ungleichung

$$\| F \|_2 \leq 2 \| f \|_2 .$$

(Hinweis: Betrachten Sie zuerst $f \in \mathrm{C}^0_c(0,\infty)$, $f \geq 0$ und integrieren Sie $\int\limits_0^\infty F^2(x) dx$ partiell.)

AUFGABE 26:
Für $f \in \mathrm{L}^2(I\!R/(2\pi))$ bezeichne $P_n f$ die Orthogonalprojektion auf den von den Funktionen 1, $\cos(x)$, $\sin(x), \ldots, \cos(nx)$, $\sin(nx)$, aufgespannten Raum, also das n-te Fourierpolynom. Bestätigen Sie die folgende Darstellung

$$(P_n f)(x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi (f(x+\xi) + f(x-\xi)) \frac{\sin((2n+1)\frac{\xi}{2})}{\sin(\frac{\xi}{2})} d\xi.$$

Vergessen Sie bitte nicht, Ihren Namen und die Nummer Ihrer Übungsgruppe auf Ihre Lösungsblätter zu schreiben. Abgabetermin ist Montag, 24.11.1997, von 14^{00} *Uhr bis* 14^{10} *Uhr.*