MATHEMATISCHES INSTITUT DER
ALBERT-LUDWIGS-UNIVERSITÄT FREIBURG

Prof. Dr. E. Kuwert
Dr. R. Schätzle

24.11.1997

Analysis III
WS 1997/98
7.Übung

AUFGABE 27:
Es sei $f \in \mathrm{L}^2(\mathbb{R}/(2\pi))$, $\mathrm{x}_0 \in \mathbb{R}$ und die einseitigen Grenzwerte und Ableitungen von f existieren bei x_0 . Zeigen Sie, daß die Fourierreihe von f an der Stelle x_0 gegen $\frac{1}{2}(f(x_0+)+f(x_0-))$ konvergiert, wobei $f(x_0\pm) := \lim\limits_{h\downarrow 0} f(x_0 \pm h)$.
(Hinweis: Benutzen Sie die Formel in Aufgabe 26 und Aufgabe 23(ii).)

AUFGABE 28:
Betrachten Sie den komplexen Hilbertraum $\mathrm{L}^2(\mathbb{R}/(2\pi), \mathbb{C})$ mit dem Skalarprodukt $\langle f, g\rangle = \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)\overline{g(x)}dx$ und dem Orthonormalsystem $u_k(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{ikx}, k \in \mathbb{Z}$. Zeigen Sie folgende Aussagen.

(i) $F : \mathrm{L}^2(\mathbb{R}/(2\pi), \mathbb{C}) \to \mathrm{l}^2(\mathbb{C})$, mit $\mathrm{F(f)_k} := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\pi}^{\pi} \mathrm{f(x)e^{-ikx}dx}$ ist beschränkt und hat eine isometrische Rechtsinverse.

(ii) Für $f \in W^{r,2}(\mathbb{R}/(2\pi), \mathbb{C})$, d.h. f hat schwache Ableitungen bis zur Ordnung $r \in \mathbb{N}_0$ in $\mathrm{L}^2(\mathbb{R}/(2\pi), \mathbb{C})$, gilt

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} k^{2r} |F(f)_k|^2 \leq \| \frac{d^r f}{dx^r} \|_{\mathrm{L}^2}^2 .$$

(iii) Folgern Sie, daß die Fourierreihe mitsamt ihren Ableitungen bis zur Ordnung $r-1$ gleichmäßig gegen ein $\tilde{f} \in \mathrm{C}^{\mathrm{r}-1}(\mathbb{R}/(2\pi), \mathbb{C})$ konvergiert, falls $f \in W^{r,2}$ und $r \geq 1$.

AUFGABE 29:
Die Eigenschwingungen einer fest eingespannten Membran $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ sind die Eigenfunktionen u von $-\Delta$ unter den Randbedingungen $u|_{\partial\Omega} = 0$. Für $\Omega := (0, a) \times (0, b)$ lauten diese $u_{k,l}(x, y) = \sin(\frac{\pi k}{a}x)\sin(\frac{\pi l}{b}y)$ mit $k, l \in \mathbb{N}$. Es sei $N(\Lambda)$ die Zahl der linear unabhängigen Eigenfunktionen zu Eigenwerten $\lambda \leq \Lambda$. Zeigen Sie

$$\lim_{\Lambda\to\infty} \frac{N(\Lambda)}{\Lambda} = \frac{ab}{4\pi}.$$

AUFGABE 30:

(i) Es konvergiere x_k schwach in einem Hilbertraum gegen x und $\| x_k \| \to \| x \|$. Zeigen Sie, daß $x_k \to x$ in der Norm des Hilbertraumes.

(ii) Es sei $f_\varepsilon(x) := \frac{\sqrt{\varepsilon}}{\sqrt{\varepsilon^2+x^2}}$. Zeigen Sie, daß $\| f_\varepsilon \|_{\mathrm{L}^2(\mathbb{R})} = \sqrt{\pi}$ und f_ε konvergiert schwach gegen 0 in $\mathrm{L}^2(\mathbb{R})$. Zeigen Sie demgegenüber, daß $\int f_\varepsilon^2(x)\varphi(x)dx \to \pi\varphi(0)$ für $\varphi \in \mathrm{C}_\mathrm{c}^0(\mathbb{R})$.

Vergessen Sie bitte nicht, Ihren Namen und die Nummer Ihrer Übungsgruppe auf Ihre Lösungsblätter zu schreiben. Abgabetermin ist Montag, 1.12.1997, von 14^{00} *Uhr bis* 14^{10} *Uhr.*