MATHEMATISCHES INSTITUT DER
ALBERT-LUDWIGS-UNIVERSITÄT FREIBURG

Prof. Dr. E. Kuwert
Dr. R. Schätzle

1.12.1997

Analysis III
WS 1997/98
8.Übung

AUFGABE 31:
Berechnen Sie die Fourierreihe der Funktion $f(x) := dist(x, 2\pi\mathbb{Z})$ und folgern Sie die Formel $\sum\limits_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{(2\nu-1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$.
(Hinweis: Verwenden Sie Aufgabe 27.)

AUFGABE 32:
Es sei $\eta \in \mathrm{C}_c^\infty(-1,1)$, mit $\eta \geq 0$ und $\int_{\mathbb{R}} \eta = 1$, und $\eta_\varrho(x) := \varrho^{-1}\eta(\frac{x}{\varrho})$. Zeigen Sie für $u \in \mathrm{W}^{1,2}(\mathbb{R}/\mathrm{L})$ die Ungleichung

$$|(\eta_\varrho * u)(x) - (\eta_\sigma * u)(x)| \leq \| u_x \|_{\mathrm{L}^2(0,\mathrm{L})} |\varrho - \sigma|^{\frac{1}{2}},$$

wenn $|\varrho - \sigma| \leq L$.

AUFGABE 33:
Es sei ν das Zählmaß auf $(0,1)$. Begründen Sie, daß dann der Hilbertraum $\mathrm{L}^2(\nu)$ nicht separabel ist, d.h. keine abzählbare und dichte Teilmenge besitzt.
(Hinweis: Zeigen Sie erst $\| u \|_{\mathrm{L}^2(\nu)}^2 = \sum\limits_{x\in(0,1)} u(x)^2$.)

AUFGABE 34:
Hier soll das Anfangswertproblem für die Wärmeleitung in einem Ring der Länge 2π , d.h.

$$u_t = u_{xx} \quad \text{auf } (0,\infty) \times \mathbb{R},$$
$$u(0,.) = u_0 \in \mathrm{L}^2(\mathbb{R}/(2\pi)),$$

mittels der in Aufgabe 28 bestimmten Reihendarstellung

$$u(t,x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \exp(-k^2 t)(a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx))$$

gelöst werden; dabei sind $a_k, b_k \in \mathbb{R}$ die Fourierkoeffizienten von u_0 . Zeigen Sie, daß $u \in \mathrm{C}^\infty((0,\infty) \times \mathbb{R})$ und diskutieren Sie die Annahme des Anfangswertes "$\lim\limits_{t\downarrow 0} u(t,.) = u_0$" unter geeigneten Annahmen. (Dabei könnte der Limes als schwacher oder starker Grenzwert in L^2 , als Grenzwert in C^0 usw. interpretiert werden.)

Vergessen Sie bitte nicht, Ihren Namen und die Nummer Ihrer Übungsgruppe auf Ihre Lösungsblätter zu schreiben. Abgabetermin ist Montag, 8.12.1997, von 14^{00} *Uhr bis* 14^{10} *Uhr.*