MATHEMATISCHES INSTITUT DER
ALBERT-LUDWIGS-UNIVERSITÄT FREIBURG

Prof. Dr. E. Kuwert
Dr. R. Schätzle

15.12.1997

Analysis III
WS 1997/98
9.Übung

AUFGABE 35:
Bestimmen Sie die $2\pi-$periodische Lösung der inhomogenen linearen Differentialgleichung

$$x'' + 2\beta x' + \omega_0^2 x = f$$

für $f \in \mathrm{C}^1(\mathbb{R}/(2\pi))$, $\mathrm{f(t)} = \mathrm{f}(-\mathrm{t})$ $\omega_0 \notin \mathbb{Z}$, indem Sie f in eine Fourierreihe entwickeln. Berechnen Sie auch $\| x \|_{\mathrm{L}^2}^2$. In beiden Fällen genügen Reihendarstellungen.

AUFGABE 36:

(a) Bestimmen Sie für $1 \leq p < \infty$ alle α , so daß $|x|^\alpha \in W^{1,p}(0,1)$.

(b) Zeigen Sie, daß eine Einbettung $J : W^{1,p}(0,1) \subset \mathrm{C}^0(0,1)$ durch Zuordnung eines stetigen Repräsentanten existiert. Zeigen Sie weiter, daß

$$\frac{|Ju(x) - Ju(y)|}{|x-y|^\alpha} \leq C \| u \|_{W^{1,p}},$$

für $x \neq y$, und bestimmen Sie dabei $\alpha > 0$ optimal.

AUFGABE 37:
Schreiben Sie die Lösung in Aufgabe 34 als Integral

$$u(t,x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} u_0(y) \vartheta(t, x-y) \mathrm{dy}$$

und geben Sie eine Reihendarstellung für ϑ an. Begründen Sie, daß ϑ die Gleichung für die Wärmeleitung mit Anfangswerten δ_0 erfüllt, wobei δ_0 das Dirac-Maß im Nullpunkt ist, d.h. zeigen Sie, daß $\vartheta_t - \vartheta_{xx} = 0$ für $t > 0$ gilt und diskutieren Sie den Grenzwert "$\lim\limits_{t \downarrow 0} \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} u_0(x) \vartheta(t,x) \mathrm{dx}$" .

AUFGABE 38:
Bestimmen Sie die Lösung der Gleichung

$$LG := -G'' + \omega_0^2 G = \delta_0$$

mit $G(x) \to 0$ für $|x| \to \infty$, wobei δ_0 das Dirac-Maß im Nullpunkt ist, d.h. bestimmen Sie eine Funktion G für die $\int\limits_{\mathbb{R}} G(x)\ (L\varphi)(x) \mathrm{dx} = \varphi(0)$, für $\varphi \in \mathrm{C}_c^\infty(\mathbb{R})$.
(Hinweis: Zeigen Sie, daß G in $\mathbb{R} - \{0\}$ die homogenen Gleichung $LG = 0$ löst, und untersuchen Sie Sprungbedingungen für G und G' in 0.)

Vergessen Sie bitte nicht, Ihren Namen und die Nummer Ihrer Übungsgruppe auf Ihre Lösungsblätter zu schreiben. Abgabetermin ist Montag, 22.12.1997, von 14^{00} *Uhr bis* 14^{10} *Uhr.*