MATHEMATISCHES INSTITUT DER
ALBERT-LUDWIGS-UNIVERSITÄT FREIBURG

Prof. Dr. E. Kuwert
Dr. R. Schätzle

19.10.1998

Theorie partieller Differentialgleichungen I
WS 1998/99
1.Übung

AUFGABE 1:
Schreiben Sie die Differentialgleichungen der Vorlesung, etwa den hyperbolischen Erhaltungssatz, die Navier-Stokes Gleichung, die Monge-Ampère Gleichung, die Korteweg-de Vries Gleichung und die Maxwell Gleichungen, in der Form

$$F(x, u, Du, D^2u, \ldots, D^ku) = 0,$$

und bestimmen Sie, ob diese Gleichungen linear, semi-linear, quasi-linear oder voll nichtlinear sind.

AUFGABE 2:
Betrachten Sie das quasi-lineare elliptische System

$$A_{ij}^{\alpha\beta}(x, u, Du)\partial_{\alpha\beta}^2 u^j + A_i(x, u, Du) = 0,$$

$1 \leq \alpha, \beta \leq n,\ 1 \leq i, j \leq m$. Geben Sie notwendige und hinreichende Bedingungen für $A_{ij}^{\alpha\beta}$ an, so daß sich dieses System für geeignetes A_i lokal als Euler-Lagrange-Gleichung schreiben läßt, d.h. in der Form

$$div((D_pF)(x, u, Du)) - (D_zF)(x, u, Du) = 0.$$

AUFGABE 3:
Die Energie eines Flüssigkeitstropfens $M := \{(x,t) \mid x \in \overline{\Omega},\ t \leq \varphi(x)\ \}$ in einem zylindrischen Gebiet $\overline{\Omega} \times I\!R$, $\emptyset \neq \Omega \subset I\!R^n$ offen und mit glattem Rand $\partial\Omega$, mit glattem $\varphi : \overline{\Omega} \to [0, \infty[$ sei gegeben durch:

$$E(M) = E(\varphi) := \int_\Omega \sqrt{1 + |D\varphi|^2}\ \mathrm{d}x + \sigma \int_{\partial\Omega} \varphi\ \mathrm{d}\mathcal{H}^{n-1},$$

wobei $|\sigma| < 1$. Bestimmen Sie die erste Variation von E und die resultierenden Differentialgleichungen in Ω und $\partial\Omega$ und interpretieren Sie die Randbedingung geometrisch.

AUFGABE 4:
Betrachten Sie die p-Energie für $1 < p < \infty$

$$E_p(u) := \int_\Omega |Du|^p\ \mathrm{d}x$$

für glatte, skalare Funktionen $u : \Omega \to I\!R$. Bestimmen Sie die erste Variation dieser Energie, geben Sie für geeignete p die Differentialgleichung für stationäre Punkte an.

Vergessen Sie bitte nicht, Ihren Namen auf Ihre Lösungsblätter zu schreiben. Abgabetermin ist Montag, 26.10.1998, von 9^{00} *Uhr bis* 9^{10} *Uhr.*