MATHEMATISCHES INSTITUT DER
ALBERT-LUDWIGS-UNIVERSITÄT FREIBURG

Prof. Dr. E. Kuwert
Dr. R. Schätzle

21.12.1998

Theorie partieller Differentialgleichungen I
WS 1998/99
10.Übung

AUFGABE 37: (Randwerte)
Es sei $\Omega \subset\subset I\!R^n$ offen und $f \in L^2(\Omega),\ g \in W^{1,2}(\Omega)$. Wir betrachten das folgende elliptische Randwertproblem:

$$\begin{aligned} -\partial_\beta(a^{\alpha\beta}\partial_\alpha u) &= f \quad \text{in } \Omega, \\ u - g &\in \overset{\circ}{W}{}^{1,2}(\Omega), \end{aligned}$$

wobei $a^{\alpha\beta} \in L^\infty(\Omega)$ elliptisch ist, d.h $a^{\alpha\beta}\xi_\alpha\xi_\beta \geq \mu|\xi|^2$. Geben Sie eine schwache Formulierung des Problems an, zeigen Sie die Existenz einer eindeutigen Lösung und beweisen Sie die folgende Abschätzung

$$\| u \|_{W^{1,2}(\Omega)} \leq C(\| f \|_{L^2(\Omega)} + \| g \|_{W^{1,2}(\Omega)})$$

AUFGABE 38: (Neumann-Randwerte)
Wir betrachten das elliptische Neumann-Randwertproblem:

$$\begin{aligned} -\partial_\beta(a^{\alpha\beta}\partial_\alpha u) &= f \quad \text{in } B_1, \\ a^{\alpha\beta}\partial_\alpha u\ \nu_\beta &= 0 \quad \text{auf } \partial B_1, \end{aligned} \tag{1}$$

wobei ν die äußere Einheitsnormale an ∂B_1 ist und wobei $a^{\alpha\beta} \in L^\infty(B_1)$ elliptisch ist, d.h $a^{\alpha\beta}\xi_\alpha\xi_\beta \geq \mu|\xi|^2$. Zeigen Sie folgende Aussagen.

(i) Für $u \in C^2(\overline{B_1}),\ a^{\alpha\beta} \in C^1(\overline{B_1})$ und $f \in C^0(\overline{B_1})$ ist (1) äquivalent zu

$$\int_{B_1} a^{\alpha\beta}\partial_\alpha u \partial_\beta \varphi = \int_{B_1} f\varphi \quad \text{für } \varphi \in W^{1,2}(B_1). \tag{2}$$

(2) wird im folgenden als schwache Formulierung verwendet.

(ii) Falls eine schwache Lösung $u \in W^{1,2}(B_1),\ f \in L^2(B_1)$ existiert, so gilt $\int_{B_1} f = 0$.

(iii) Für $f \in L^2(B_1), \int_{B_1} f = 0$ existiert eine eindeutige schwache Lösung u mit $\int_{B_1} u = 0$.
(Hinweis: Wenden Sie eine Poincaré-Ungleichung und den Satz von Lax-Milgram auf dem Hilbertraum $H := \{\varphi \in W^{1,2}(B_1) \mid \int_{B_1} \varphi = 0 \}$ an.)

AUFGABE 39: (Biharmonische Gleichung)
Es sei $\Omega \subset\subset I\!R^n$ eine offene Menge. Geben Sie eine schwache Formulierung des Randwertproblems für den Bi-Laplace Operator an:

$$\begin{aligned} \Delta^2 u = f \quad &\text{in } \Omega, \\ u = 0 \quad &\text{auf } \partial\Omega, \\ \partial_\nu u = 0 \quad &\text{auf } \partial\Omega. \end{aligned}$$

Zeigen Sie, daß eine eindeutige Lösung existiert.

AUFGABE 40: (Gårding-Ungleichung mit Plancherel-Transformation)
Wir betrachten den Operator

$$(Lu)_i := -a_{ij}^{\alpha\beta}\partial^2_{\alpha\beta}u^j + q_{ij}u^j$$

mit konstanten Koeffizienten a, q, der die starke Legendre-Hadamard-Bedingung

$$a_{i,j}^{\alpha,\beta}\eta_\alpha\eta_\beta\xi^i\xi^j \geq \mu|\eta|^2|\xi|^2 \quad \text{für } \eta, \xi \in I\!R^n$$

für ein $\mu > 0$ erfüllt. Zeigen Sie für $u \in C^2_c(I\!R^n, I\!R^m)$, daß

$$\int\limits_{I\!R^n} \langle Lu, u\rangle \mathrm{d}x \geq c_0 \parallel \nabla u \parallel^2_{L^2(I\!R^n)} - C \parallel u \parallel^2_{L^2(I\!R^n)}$$

für Konstanten $0 < c_0 < C < \infty$.
(Hinweis: Wenden Sie die Plancherel-Transformation, siehe Aufgabe 27, an.)

Vergessen Sie bitte nicht, Ihren Namen auf Ihre Lösungsblätter zu schreiben. Abgabetermin ist Montag, 11.1.1999, von 9^{00} *Uhr bis* 9^{10} *Uhr.*

MATHEMATISCHES INSTITUT DER
ALBERT-LUDWIGS-UNIVERSITÄT FREIBURG

Prof. Dr. E. Kuwert
Dr. R. Schätzle

21.12.1998

Theorie partieller Differentialgleichungen I
WS 1998/99
10.Übung, Teil 2 (Sonder-Angebot)

AUFGABE 41: (Laplace-Operator auf Mannigfaltigkeiten)
Hier soll der Laplaceoperator bzgl. einer glatten, Riemannschen Metrik $\langle .,. \rangle$ auf einer kompakten Mannigfaltigkeit M ohne Rand definiert und untersucht werden.

Unter einer lokalen Koordinate $\varphi : U \xrightarrow{\sim} \Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ entsprechen Tensoren auf M (ko-)vektorwertigen Funktionen. Ist $\tilde{\varphi} : \tilde{U} \xrightarrow{\sim} \tilde{\Omega} \subseteq \mathbb{R}^n$ eine weitere Koordinate (z.B. stereographische Projektion vom Nord- und Südpol auf S^n), so hat man die Koordinatentransformationen $\Phi := \tilde{\varphi} \circ \varphi^{-1} : \varphi(U \cap \tilde{U}) \to \tilde{\varphi}(U \cap \tilde{U})$. Tensoren haben dann das Transformationsverhalten:

Funktionen:	$u = \tilde{u} \circ \Phi,$
Vektorfelder:	$X = D\Phi^{-1} \cdot (X \circ \Phi),$
Metrik:	$g(X,Y) = (\tilde{g} \circ \Phi)(D\Phi \cdot X, D\Phi \cdot Y),$
Volumenelement:	$\int\limits_{\Omega} \tilde{\eta} \circ \Phi \, \mathrm{d}\mu_g = \int\limits_{\tilde{\Omega}} \tilde{\eta} \, \mathrm{d}\mu_{\tilde{g}}.$

Wir definieren nun bzgl. einer Karte lokal die Operationen $grad\ u$, $div\ X$ durch

$$g(grad\ u, X) = Du \cdot X,$$
$$\int\limits_{\Omega} \eta \ div\ X \ \mathrm{d}\mu = - \int\limits_{\Omega} g(grad\ \eta, X) \ \mathrm{d}\mu \quad \text{für } \eta \in C_c^\infty(\Omega).$$

Zeigen Sie:

(i) Die Operatoren $grad$ und div sind global wohldefiniert. In Koordianten lauten sie

$$grad\ u = g^{\alpha\beta} \partial_\alpha u \ e_\beta \quad \text{und} \quad div\ X = \frac{1}{\sqrt{det(g)}} \partial_\alpha (\sqrt{det(g)} X^\alpha).$$

(ii) Der Raum

$$W^{1,2}(M) := \{ v \in L^2(M) \mid \text{für jede Karte } \varphi : U \to \Omega \text{ ist } u := v \circ \varphi^{-1} \in W^{1,2}_{loc}(\Omega) \ \}$$

ist mit dem Skalarprodukt

$$\langle u, v \rangle_{W^{1,2}(M)} := \int\limits_M (uv + \langle grad\ u, grad\ v \rangle) \mathrm{d}\mu$$

ein Hilbertraum.

(iii) $L : W^{1,2}(M) \to W^{1,2}(M)'$, $L := -\Delta + q$ mit $q \in L^\infty(M)$, definiert durch

$$(Lu)(v) := \int\limits_M (\langle grad\ u, grad\ v \rangle + quv) \mathrm{d}\mu,$$

ist ein (stetiger) Fredholm-Operator vom Index Null.