MATHEMATISCHES INSTITUT DER
ALBERT-LUDWIGS-UNIVERSITÄT FREIBURG

Prof. Dr. E. Kuwert
Dr. R. Schätzle

11.1.1999

Theorie partieller Differentialgleichungen I
WS 1998/99
11.Übung

AUFGABE 42: ($W^{2,2}-$Regularität)
Betrachten Sie eine schwache Lösung $u \in W^{1,2}(\Omega)$ von

$$div\ A(Du) = f \quad \text{in } \Omega, \tag{1}$$

wobei $f \in L^2(\Omega)$ und $A \in C^1(I\!R^n, I\!R^n)$ gleichmäßig elliptisch ist, genauer

$$\partial_\alpha A_\beta(p)\eta_\alpha\eta_\beta \geq \mu|\eta|^2 \quad \text{und} \quad \| DA \| \leq M$$

für alle $p, \eta \in I\!R^n$. Zeigen Sie mit der Differenzenquotiententechnik $u \in W^{2,2}_{loc}(\Omega)$.
(Bemerkung: Die Euler-Lagrange Gleichung eines Variationsintegrals $\mathcal{F}(u) = \int\limits_\Omega f(Du)\mathrm{d}x$ ist von der Form in (1) mit $A(p) = (D_p f)(p)$.)

AUFGABE 43: (Widmans Lochfülltrick)
Es sei $u \in W^{1,2}(\Omega)$ eine schwache Lösung von $-\partial_\beta(a^{\alpha\beta}\partial_\alpha u) = 0$ mit $a^{\alpha\beta}(x)\eta^\alpha\eta^\beta \geq \mu|\eta|^2$ und $|a^{\alpha\beta}(x)| \leq M$ für alle $x \in \Omega,\ \eta \in I\!R^n$. Zeigen Sie für $B_R(x_0) \subset\subset \Omega$.

(i)

$$\int\limits_{B_{R/2}(x_0)} |Du|^2\ \mathrm{d}x \leq CR^{-2} \int\limits_{B_R(x_0)-B_{R/2}(x_0)} |u-s|^2\ \mathrm{d}x$$

für alle $s \in I\!R$ mit $C = C(\mu, M)$ unabhängig von R .

(ii)

$$\int\limits_{B_{R/2}(x_0)} |Du|^2\ \mathrm{d}x \leq \theta \int\limits_{B_R(x_0)} |Du|^2\ \mathrm{d}x,$$

wobei $\theta < 1$.
(Hinweis: Wählen Sie in (i) $s = \fint_{B_R(x_0)-B_{R/2}(x_0)} u =: \bar{u_R}$, und verwenden Sie ohne Beweis die Poincaré-Ungleichung $\| u - \bar{u_1} \|_{L^2(B_1(0)-B_{1/2}(0))} \leq C \| Du \|_{L^2(B_1(0)-B_{1/2}(0))}$. Addieren Sie schließlich zur Abschätzung $C \int\limits_{B_{R/2}(0)} |Du|^2\ \mathrm{d}x$.)

(iii) $u \equiv const$, falls $Du \in L^2(I\!R^n)$.

AUFGABE 44: (Verallgemeinerung des Satzes von Lebesgue)
Seien $f_k : (X, \mu) \to [-\infty, \infty]$ meßbar, und es gelte

$$(i)\ f_k \to f \quad \text{punktweise fast überall,}$$
$$(ii)\ |f_k|^p \le |g_k|^q \text{ für } g_k \in L^q(\mu) \quad \text{mit} \quad g_k \to g \text{ in } L^q(\mu),$$

wobei $1 \le p, q < \infty$. Folgern Sie $f_k \to f$ in $L^p(\mu)$.
(Hinweis: Wenden Sie das Lemma von Fatou auf die Funktionen $u_k = 2^{p-1}(|g|^q + |g_k|^q) - |f - f_k|^p$ an.)

AUFGABE 45: (Sublösungen)
Es sei $u \in W^{1,2}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ eine schwache Sublösung von $Lu = -\partial_\beta(a^{\alpha\beta}\partial_\alpha u) \le 0$. Weisen Sie nach, daß dann auch $L(\varphi \circ u) \le 0$ gilt für jede konvexe Funktion $\varphi \in C^1(I\!R)$ mit $\varphi' \ge 0$.

Vergessen Sie bitte nicht, Ihren Namen auf Ihre Lösungsblätter zu schreiben. Abgabetermin ist Montag, 18.1.1999, von 9^{00} *Uhr bis* 9^{10} *Uhr.*