MATHEMATISCHES INSTITUT DER
ALBERT-LUDWIGS-UNIVERSITÄT FREIBURG

Prof. Dr. E. Kuwert
Dr. R. Schätzle

18.1.1999

Theorie partieller Differentialgleichungen I
WS 1998/99
12.Übung

AUFGABE 46: (Höhere Regularität)
Es sei $\Omega \subset\subset \mathbb{R}^n$ mit $C^{k+2}-$Rand $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ und $a^{\alpha\beta} \in W^{k+1,\infty}(\Omega)$, $q \in W^{k,\infty}(\Omega)$. Der hierdurch definierte Differentialoperator kann einmal im schwachen und einmal im starken Sinn aufgefaßt werden, also $L : H_0^{1,2}(\Omega) \to W^{-1,2}(\Omega)$ sowie $L_k : (H_0^{1,2} \cap W^{k+2,2})(\Omega) \to W^{k,2}(\Omega)$. Bestimmen Sie den Kern, das Bild sowie ein Komplement des Bildes von L_k . Schließen Sie weiter, daß L_k ein Fredholm-Operator mit Index Null ist.

AUFGABE 47: (Glattbiegen des Randes)
Zeigen Sie folgende Aussagen.

(i) Es seien $\Omega, \Omega' \subset\subset \mathbb{R}^n$ und $\Phi : \overline{\Omega} \xrightarrow{\sim} \overline{\Omega'}$ ein C^1-Diffeomorphismus. Dann ist $\Phi^{\#} : W^{1,2}(\Omega') \to W^{1,2}(\Omega)$ mit $u \mapsto u \circ \Phi$ ein linearer Isomorphismus.

(ii) Es sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ mit $x_0 \in \partial\Omega$ und $\Psi : U(x_0) \xrightarrow{\sim} B_1(0)$ ein C^1-Diffeomorphismus einer Umgebung $U(x_0)$ mit

$$\Psi(x_0) = 0,$$
$$\Psi(\Omega \cap U(x_0)) = B_1(0) \cap \{x_n < 0\}.$$

Es sei $u \in W^{1,2}(\Omega)$ eine schwache Lösung der Differentialgleichung $Lu := -\partial_\beta(a^{\alpha\beta}\partial_\alpha u) + qu = f$, wobei $a^{\alpha\beta} \in C^0(\overline{\Omega})$, $q \in L^\infty(\Omega)$ und $f \in L^2(\Omega)$. Bestimmen Sie die Koeffizienten der transformierten Gleichung für $v := u \circ \Phi$, wobei $\Phi := \Psi^{-1}$. Kann Ψ so gewählt werden, daß in den neuen Koordinaten $\tilde{a}^{\alpha\beta}(0) = \delta_{\alpha\beta}$?

AUFGABE 48: (Semi-lineare elliptische Gleichung)
Es sei $u \in C^2_{loc}(\mathbb{R}^n)$, $u \geq 0$ eine schwache Lösung der Differentialgleichung

$$-\Delta u + f(u) = 0.$$

Dabei sei $f \in C^1([0, \infty[), f(1) = 0$ und

$$f'(t) \geq \mu |t|^{p-2} \quad \text{für } t \geq 1 - \mu$$

für gegebenes $p > 2, \mu > 0$. Zeigen Sie folgende Aussagen, wobei die Konstanten C von p, μ und n abhängen.

(i) Für jeden Ball $B_1 \subset \mathbb{R}^n$

$$\| Du \|_{L^2(B_1)}, \ \| u \|_{L^p(B_1)}, \ \| f(u) \|_{L^2(B_1)} \leq C.$$

(Hinweis: Testen Sie mit $u\ \eta^{\frac{2p}{p-2}}$ und $v\eta^2$, wobei $v := f(u)\chi_{[u \geq 1]}$.)

(ii) Für $n \leq 3$ gilt

$$\| u \|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \leq C.$$

(iii) Falls $u \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$, so gilt $u \leq 1$.
(Hinweis: Zeigen Sie, daß $w(x) := 1 + \tau e^{\delta|x|^2}$ für $\delta, \tau > 0$ und δ klein die Differentialungleichung $-\Delta w + f(w) \geq 0$ auf einem großen Ball erfüllt, und wenden Sie das Maximumprinzip an.)

Vergessen Sie bitte nicht, Ihren Namen auf Ihre Lösungsblätter zu schreiben. Abgabetermin ist Montag, 25.1.1999, von 9^{00} Uhr bis 9^{10} Uhr.