MATHEMATISCHES INSTITUT DER
ALBERT-LUDWIGS-UNIVERSITÄT FREIBURG

Prof. Dr. E. Kuwert
Dr. R. Schätzle

25.1.1999

Theorie partieller Differentialgleichungen I
WS 1998/99
13.Übung

AUFGABE 49: (Interpolation)
Es sei $\Omega \subset\subset I\!R^n$ mit C^2-Rand und $1 \leq p < \infty$. Zeigen Sie für $u \in W^{2,p}(\Omega),\ 0 < \varepsilon < 1$ die Abschätzung

$$\| Du \|_{L^p(\Omega)} \leq \varepsilon \| D^2 u \|_{L^p(\Omega)} + C\varepsilon^{-1} \| u \|_{L^p(\Omega)},$$

wobei C unabhängig von u und ε ist.
(Hinweis: Zeigen Sie die Abschätzung zuerst im Eindimensionalen und dann für $u \in H_0^{2,p}(\Omega)$.)

AUFGABE 50: (Grenzen des Satzes von Rellich)
Betrachten Sie die offene Menge $\Omega :=]0,1[^2 - \cup_{k=1}^{\infty} (\{2^{-k}\} \times]0,1/2])$ und konstruieren Sie eine Folge $u_k \in W^{1,2}(\Omega)$ mit $\| u \|_{W^{1,2}(\Omega)} \leq C$, $\| u \|_{L^2(\Omega)} = 1$ und $u_k \to 0$ punktweise auf Ω . Schließen Sie daraus, daß der Satz von Rellich auf Ω nicht gilt.

AUFGABE 51: (Kapazität)
Es seien $D \subset\subset \Omega \subseteq I\!R^n$ offene Mengen. Die Kapazität von D in Ω ist definiert durch

$$cap_\Omega(D) := \inf\{ \int_\Omega |\nabla u|^2 \mid u \in H_0^{1,2}(\Omega),\ u = 1 \text{ auf } D \}.$$

Zeigen Sie folgende Aussagen.

(i) Für $D' \subseteq D$ und $\Omega \subseteq \Omega'$ gilt

$$cap_{\Omega'}(D') \leq cap_\Omega(D).$$

(ii) Das Infimum in obiger Definition wird angenommen.

(iii) Für $n \geq 3$ gilt

$$\mathcal{L}^n(D)^{1-2/n} \leq C_n cap_\Omega(D).$$

(Hinweis: Verwenden Sie eine Sobolev Einbettung.)

AUFGABE 52: (Max-Min-Prinzip von Courant)
Es sei $\Omega \subset\subset I\!R^n$, $H_0^{1,2}(\Omega) \subseteq V \subseteq W^{1,2}(\Omega)$ ein abgeschlossener Unterraum und $L : V \to V'$ selbstadjungiert mit $Lu := -\partial_\beta(a^{\alpha\beta}\partial_\alpha u) + qu$ für $u \in V$, wobei $a^{\alpha\beta}(x)\eta^\alpha\eta^\beta \geq \mu|\eta|^2$, $a^{\alpha\beta} = a^{\beta\alpha}$ und $|a^{\alpha\beta}(x)|,\ |q(x)| \leq M$ für alle $x \in \Omega,\ \eta \in I\!R^n$. Zeigen Sie, daß die Eigenwerte $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \ldots$ von L das folgende Max-Min-Prinzip erfüllen:

$$\lambda_k = \max_{W \subseteq V,\ dim\ W = k-1} \min\{\langle Lu, u\rangle \mid u \in V, \int_\Omega uw = 0 \text{ für } w \in W \ \| u \|_{L^2(\Omega)} = 1 \}.$$

Für $V = W^{1,2}(\Omega)$ bzw. $V = H_0^{1,2}(\Omega)$ bezeichnen wir die Eigenwerte mit λ_k^N bzw. λ_k^D . Zeigen Sie

$$\lambda_k^N \leq \lambda_k^D.$$

Vergessen Sie bitte nicht, Ihren Namen auf Ihre Lösungsblätter zu schreiben. Abgabetermin ist Montag, 1.2.1998, von 9^{00} Uhr bis 9^{10} Uhr.