MATHEMATISCHES INSTITUT DER
ALBERT-LUDWIGS-UNIVERSITÄT FREIBURG

Prof. Dr. E. Kuwert
Dr. R. Schätzle

1.2.1999

Theorie partieller Differentialgleichungen I
WS 1998/99
14.Übung

AUFGABE 53: (Nicht-lineares Maximumprinzip)
Für $\Omega \subset\subset I\!R^n$ mit C^2-Rand betrachten wir die voll nicht-lineare elliptische Gleichung

$$F(x, u(x), Du(x), D^2u(x)) = 0 \quad \text{für } x \in \Omega.$$

Dabei setzen wir $F \in C^1(\overline{\Omega} \times I\!R \times I\!R^n \times I\!R^{n,n}, I\!R)$ mit

$$\partial_{Q_{\alpha\beta}} F(x, z, p, Q)\eta_\alpha \eta_\beta > 0 \text{ für } \eta \in I\!R^n - \{0\} \quad \text{und} \quad \partial_z F(x, z, p, Q) \leq 0$$

voraus. Nun seien $u, v \in C^2(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$ mit $F(., u, Du, D^2u) \geq 0$, $F(., v, Dv, D^2v) \leq 0$ in Ω und $u \leq v$ auf $\partial\Omega$. Zeigen Sie $u \leq v$ auf ganz Ω .

AUFGABE 54: (Eindeutigkeit des Neumann-Problems)
Es sei $\Omega \subset\subset I\!R^n$ zusammenhängend mit C^2-Rand und $u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$ ein Lösung des Neumann-Problems

$$\begin{aligned} -a^{\alpha\beta}\partial_{\alpha\beta} u + qu = f \quad &\text{in } \Omega, \\ \partial_\nu u = 0 \quad &\text{auf } \partial\Omega, \end{aligned}$$

wobei ν die äußere Einheitsnormale an $\partial\Omega$ ist, $a^{\alpha\beta}, q, f \in C^0(\overline{\Omega})$ und $a^{\alpha\beta}\eta_\alpha\eta_\beta \geq \mu|\eta|^2$, $q \geq 0$. Zeigen Sie: u ist bis auf eine Konstante eindeutig, falls $q \equiv 0$, und u ist eindeutig, falls $q \not\equiv 0$.

AUFGABE 55: (Parabolisches Maximumprinzip)
Es sei $\Omega \subset\subset I\!R^n$ mit C^1-Rand und $u \in L^2((0, T); W^{1,2}(\Omega))$ eine Lösung des parabolischen Anfangs-Randwertproblems

$$\begin{aligned} \partial_t u - \partial_\beta(a^{\alpha\beta}\partial_\alpha u) + qu = f \quad &\text{in } \Omega \times (0, T), \\ u = u_D \quad &\text{auf } \Gamma_T := ((\partial\Omega) \times (0, T)) \cup (\Omega \times \{0\}), \end{aligned}$$

wobei $u_D \in C^0([0, T]; W^{1,2}(\Omega))$, $a^{\alpha\beta}, q, f, u_D \in L^\infty(\Omega_T)$ und $a^{\alpha\beta}\eta_\alpha\eta_\beta \geq \mu|\eta|^2$. Weiter gelte $q \geq -\Lambda$ mit $\Lambda \geq 0$. Zeigen Sie

$$\sup_{\Omega_T} u \leq e^{\Lambda T}(\sup_{\Gamma_T} u_{D,+} + T \sup_{\Omega_T} f_+).$$

(Hinweis: Betrachten Sie $\tilde{u} := e^{-\Lambda t}u - t \sup_{\Omega_T} f_+$.)

AUFGABE 56: (Spektralzerlegung und Wellengleichung)
Es sei $\Omega \subset\subset I\!R^n$ mit $C^\infty-$Rand und u_j eine Orthonormal-Basis von $L^2(\Omega)$ aus

Eigenfunktionen des Laplaceoperators auf $H_0^{1,2}(\Omega)$ mit Eigenwerten $0 < \lambda_1 \leq \ldots$ Der Operator $e^{it\Delta} : L^2(\Omega) \to L^2(\Omega)$ sei definiert durch

$$e^{it\Delta} u_j := e^{it\sqrt{\lambda_j}} u_j .$$

Zeigen Sie folgende Aussagen.

(i) $e^{it\Delta} : L^2(\Omega) \to L^2(\Omega)$ und $e^{it\Delta} : W^{k,2}(\Omega) \cap H_0^{1,2}(\Omega) \to W^{k,2}(\Omega) \cap H_0^{1,2}(\Omega)$ sind beschränkt und linear für $k \geq 1$.

(ii) $u(t) := e^{it\Delta} u_0$ erfüllt

$$\partial_t^m u \in C^0([0,T]; W^{k-m,2}(\Omega))$$

für $0 \leq m \leq k$ und $u_0 \in W^{k,2}(\Omega) \cap H_0^{1,2}(\Omega),\ k \geq 1$.

(iii) Für $u_0 \in H_0^{1,2}(\Omega)$ löst $u(t) := e^{it\Delta} u_0$ die Wellengleichung

$$\begin{aligned} \partial_t^2 u - \Delta u = 0 \quad & \text{in } \Omega \times (0,T), \\ u = u_0 \quad & \text{auf } \Omega \times \{0\}, \\ u = 0 \quad & \text{auf } (\partial\Omega) \times (0,T). \end{aligned}$$

Dabei werden die Anfangsdaten stetig in $H_0^{1,2}(\Omega)$ angenommen.

(Hinweis: Überlegen Sie, daß $c_k \sum_{j=1}^{\infty} |\alpha_j|^2 (1 + |\lambda_j|^k) \leq \| u \|^2_{W^{k,2}(\Omega)} \leq C_k \sum_{j=1}^{\infty} |\alpha_j|^2 (1 + |\lambda_j|^k)$ für $u = \sum_{j=1}^{\infty} \alpha_j u_j \in W^{k,2}(\Omega) \cap H_0^{1,2}(\Omega)$ und $0 < c_k \leq C_k < \infty$.)

Vergessen Sie bitte nicht, Ihren Namen auf Ihre Lösungsblätter zu schreiben. Abgabetermin ist Montag, 8.2.1998, von 9^{00} *Uhr bis* 9^{10} *Uhr.*