MATHEMATISCHES INSTITUT DER
ALBERT-LUDWIGS-UNIVERSITÄT FREIBURG

Prof. Dr. E. Kuwert
Dr. R. Schätzle

26.10.1998

Theorie partieller Differentialgleichungen I
WS 1998/99
2.Übung

AUFGABE 5:
Es sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ offen mit C^1-Rand. Auf der Menge $\mathcal{C} := \{v \in C^1(\overline{\Omega}) \mid v = 0 \text{ auf } \partial\Omega\ \}$ betrachten wir das Funktional

$$F(v) := \int_\Omega (f(Dv) - gv)\ \mathrm{d}x,$$

mit $f \in C^2(\mathbb{R}^n)$, f konvex und $g \in C^0(\overline{\Omega})$. Zeigen Sie, daß eine Funktion $u \in \mathcal{C} \cap C^2(\overline{\Omega})$ das Funktional in $\mathcal{C}$ genau dann minimiert, wenn gilt

$$-div\ [(grad\ f)(Du)] = g.$$

Ist ein solches Minimum eindeutig ?

AUFGABE 6:
Das Dirichlet-Integral

$$E(u) := \int_\Omega |Du|^2 \mathrm{d}x$$

wird im folgenden für $u \in \mathcal{C} := \{u \in C^2(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^n) \mid |u| = 1\ \}$ betrachtet, wobei $\Omega \subset\subset \mathbb{R}^n$ offen und mit glattem Rand $\partial\Omega$ ist. Zeigen Sie, daß ein Minimum von E in $\mathcal{C}$ die semi-linere Differentialgleichung

$$-\Delta u = |Du|^2\ u$$

erfüllt.

AUFGABE 7:
Zeigen Sie für das Funktional

$$F(u) := \int_0^1 \Big(((u')^2 - 1)^2 + u^2 \Big)\ \mathrm{d}x,$$

daß F kein Minimum in $C^1([0,1])$ besitzt.

AUFGABE 8: (Erste Aufgabe einer Serie über Fouriertransformation)
Es sei $\mu := (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \mathcal{L}^n$ das normalisierte Lebesgue-Maß auf $\mathbb{R}^n$. Für $u \in L^1(\mu)$ sei die Fouriertransformierte $\hat{u}$ von u definiert durch

$$\hat{u}(x) := \int_{\mathbb{R}^n} u(y) e^{-i\langle x,y \rangle} \mathrm{d}\mu(y).$$

Zeigen Sie folgende Aussagen.

(i) $\hat{u} \in L^\infty$ und $\| \hat{u} \|_{L^\infty} \leq \| u \|_{L^1(\mu)}$.

(ii) Für $u,\ v \in L^1(\mu)$ gilt $\widehat{u * v} = \hat{u}\ \hat{v}$, wobei $(u * v)(x) := \int\limits_{I\!R^n} u(x-y)\ v(y)\ \mathrm{d}\mu(y)$ die Faltung von u und v bezeichnet.

(iii) Für $u,\ Du \in L^1(\mu)$ gilt $(\widehat{Du})(x) = (ix)\hat{u}(x)$.

(iv) Für $u,\ v \in L^1(\mu)$ mit $v(y) = (-iy)u(y)$ gilt $\hat{v} = D(\hat{u})$.

(v) Es sei $u \in C^2(I\!R^n)$ mit $u,\ Du,\ D^2u \in L^1(\mu)$ und u erfülle $-\Delta u = f$. Dann gilt

$$|x|^2 \hat{u}(x) = \hat{f}(x).$$

Vergessen Sie bitte nicht, Ihren Namen auf Ihre Lösungsblätter zu schreiben. Abgabetermin ist Montag, 2.11.1998, von 9^{00} *Uhr bis* 9^{10} *Uhr.*