MATHEMATISCHES INSTITUT DER
ALBERT-LUDWIGS-UNIVERSITÄT FREIBURG

Prof. Dr. E. Kuwert
Dr. R. Schätzle

2.11.1998

Theorie partieller Differentialgleichungen I
WS 1998/99
3.Übung

AUFGABE 9: (Greensche Formel)
Es sei $\Omega \subseteq I\!R^n$ offen mit C^1-Rand. Zeigen Sie folgende Aussagen.

(i) Für $u \in C^1(\Omega, I\!R),\ V \in C^1(\Omega, I\!R^n)$ gilt

$$div\ (u\ V) = grad\ u \cdot V + u\ div\ V.$$

(ii) Für $u \in C^1(\overline{\Omega}, I\!R),\ V \in C^1(\overline{\Omega}, I\!R^3)$, gilt

$$\int\limits_\Omega grad\ u(x) \cdot V(x) \mathrm{d}x = -\int\limits_\Omega u(x)\ div\ V(x) \mathrm{d}x + \int\limits_{\partial\Omega} u(x)\ V(x) \cdot \nu\ \mathrm{d}\mathcal{H}^{n-1}(x)$$

(ii) Für $u, v \in C^2(\overline{\Omega}, I\!R)$, gilt

$$\int\limits_\Omega (u(x)\ \Delta v(x) - \Delta u(x)\ v(x)) \mathrm{d}x = \int\limits_{\partial\Omega} (u(x) \partial_\nu v(x) - \partial_\nu u(x) v(x))\ \mathrm{d}\mathcal{H}^{n-1}(x)$$

AUFGABE 10: (Rang Eins-Konvexität)
Es sei $\Omega \subseteq I\!R^n$ offen. Betrachen Sie das Funktional

$$F(u) := \int\limits_\Omega f(Du) \mathrm{d}x$$

mit $f(p) := det(p)^2 + \varepsilon |p|^2$ und für $u \in C^1(\overline{\Omega}, I\!R^n)$. Verifizieren Sie, daß F nicht konvex ist, wenn $\varepsilon > 0$ klein ist, und zeigen Sie, daß F rang eins-konvex ist.
(Hinweis: Verwenden Sie, daß für $g(p) := det(p)$ und $h(p) := p^{-1}$ die Ableitungen durch $Dg(I).q = tr(q)$ und $Dh(p).q = -p^{-1} q p^{-1}$ gegeben sind.)

AUFGABE 11: (Schwaches Maximumprinzip)
Es sei $\Omega \subset\subset I\!R^n$ offen und $u \in C^2(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$ mit $\Delta u = 0$. Zeigen Sie

$$\sup_\Omega u \leq \sup_{\partial\Omega} u.$$

(Hinweis: Schließen Sie innere, globale Maxima durch Widerspruch aus, indem Sie $\varepsilon |x - x_0|^2$ zu u addieren.)

AUFGABE 12: (Satz von Harnack)
Es sei $u_1 \leq u_2 \leq \ldots$ eine monotone Folge harmonischer Funktionen, die auf der offenen, zusammenhängenden Menge $\Omega \subseteq I\!R^n$ harmonisch sind. Weiter gebe es ein $x_0 \in \Omega$ mit $u_i(x_0) \to \alpha \in I\!R$. Zeigen Sie, daß $(u_i)_i$ gleichmäßig auf kompakten Teilmengen von Ω gegen eine harmonische Funktion u konvergiert.

AUFGABE 13: (Fourier-Transformierte des Newton-Potentials)
Es sei $\mu := (2\pi)^{-\frac{n}{2}}\mathcal{L}^n$ das normalisierte Lebesgue-Maß auf $I\!R^n$. Für $u \in L^1(\mu)$ sei die Fouriertransformierte $\hat{u}$ von u definiert durch

$$\hat{u}(x) := \int\limits_{I\!R^n} u(y)e^{-i\langle x,y\rangle}\mathrm{d}\mu(y).$$

Zeigen Sie folgende Aussagen.

(i) Für $u,\ v \in L^1(\mu)$ mit $v(y) = (-iy)u(y)$ gilt $\hat{v} = D(\hat{u})$.

(ii) Es sei $u \in C^2(I\!R^n)$ mit $u,\ Du,\ D^2u \in L^1(\mu)$ und u erfülle $-\Delta u = f$. Dann gilt

$$|x|^2\hat{u}(x) = \hat{f}(x).$$

Vergessen Sie bitte nicht, Ihren Namen auf Ihre Lösungsblätter zu schreiben. Abgabetermin ist Montag, 9.11.1998, von 9^{00} *Uhr bis* 9^{10} *Uhr.*