MATHEMATISCHES INSTITUT DER
ALBERT-LUDWIGS-UNIVERSITÄT FREIBURG

Prof. Dr. E. Kuwert
Dr. R. Schätzle

9.11.1998

Theorie partieller Differentialgleichungen I
WS 1998/99
4.Übung

AUFGABE 14: (Faltung für Sobolev-funktionen)
Zeigen Sie, daß $W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$ ein Banachraum ist. Zeigen Sie weiter, daß für $f \in W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$

$$\varphi_\varepsilon * f \to f \quad \text{in } W^{1,p}(\mathbb{R}^n),$$

wobei $\varphi_\varepsilon(x) := \varepsilon^{-n}\varphi(\frac{x}{\varepsilon})$ und $\varphi \in C_c^\infty(B_1)$ mit $\int_{B_1} \varphi = 1$.

AUFGABE 15: (Eigenschaften der Fourier-Transformierten)
Wie in Aufgabe 8 und 13 sei $\mu := (2\pi)^{-\frac{n}{2}}\mathcal{L}^n$ das normalisierte Lebesgue-Maß auf $\mathbb{R}^n$. Für $u \in L^1(\mu)$ sei die Fouriertransformierte $\hat{u}$ von u definiert durch

$$\hat{u}(x) := \int\limits_{\mathbb{R}^n} u(y)e^{-i\langle x,y\rangle}\mathrm{d}\mu(y).$$

Zeigen Sie folgende Aussagen.

(i) Für $u \in L^1(\mu)$, $(\tau_a u)(x) := u(x-a)$ gilt

$$\widehat{(\tau_a u)}(x) = \hat{u}(x)e^{-i\langle x,a\rangle}.$$

(ii) Für $u,\ v \in L^1(\mu)$ gilt

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} \hat{u}(x)\ v(x)\mathrm{d}\mu(x) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} u(y)\ \hat{v}(y)\mathrm{d}\mu(y)$$

(iii) Für $u,\ \varphi \in L^1(\mu)$ und $\varphi_\varepsilon(x) := \varepsilon^{-n}\varphi(\frac{x}{\varepsilon})$ mit $\int_{\mathbb{R}^n} \varphi\ \mathrm{d}\mu = 1$ gilt

$$\| \hat{u} - \widehat{u * \varphi_\varepsilon} \|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \to 0$$

AUFGABE 16: (Hebbarkeit von Singularitäten)
Es sei $u \in C^2(\mathbb{R}^n - \{0\})$, $f \in C_c^2(\mathbb{R}^n)$ und $\nabla u \in L^2(B_1)$ mit $\Delta u = f$ in $\mathbb{R}^n - \{0\}$, $n \geq 2$. Zeigen Sie, daß $u \in C^2(\mathbb{R}^n)$ und

$$\Delta u = f \quad \text{in } \mathbb{R}^n.$$

AUFGABE 17: (Greensche Funktion)
Es sei $\Omega \subset\subset \mathbb{R}^n$ mit C^2-Rand und $G : D := \Omega \times \Omega - \{(x,x) \mid x \in \Omega\}$ sei die Greensche-Funktion. Für $x \in \Omega$ nehmen wir $(y \mapsto G(x,y)) \in C^1(\overline{\Omega} - \{x\})$ an. Zeigen Sie folgende Aussagen.

(i) $G > 0$ auf D .

(ii) G ist symmetrisch in den Argumenten, d.h.

$$G(x,y) = G(y,x)$$

für $x \neq y \in \Omega$.

(iii) $G \in C^\infty(D)$.

Vergessen Sie bitte nicht, Ihren Namen auf Ihre Lösungsblätter zu schreiben. Abgabetermin ist Montag, 16.11.1998, von 9^{00} *Uhr bis* 9^{10} *Uhr.*