MATHEMATISCHES INSTITUT DER
ALBERT-LUDWIGS-UNIVERSITÄT FREIBURG

Prof. Dr. E. Kuwert
Dr. R. Schätzle

16.11.1998

Theorie partieller Differentialgleichungen I
WS 1998/99
5.Übung

AUFGABE 18: (Inversion und Eindeutigkeit der Fourier-Transformierten)
μ sei wie in Aufgabe 8,13,15 definiert. Zeigen Sie folgenden Aussagen.

(i) Für $\Phi_\varepsilon(x) := \varepsilon^{-n}\Phi(\frac{x}{\varepsilon})$ mit $\Phi(x) := \exp(-\frac{|x|^2}{2})$ gilt

$$\widehat{\widehat{\Phi_\varepsilon}} = \Phi_\varepsilon.$$

(Hinweis: Verwenden Sie aus der Vorlesung, daß $\hat{\Phi} = \Phi$.)

(ii) Für $u \in L^1(\mu)$, das $\hat{u} \in L^1(\mu)$ erfüllt, gilt die Inversionsformel, d.h.

$$u(x) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} \hat{u}(y) e^{i\langle x,y\rangle} \mathrm{d}\mu(y).$$

(Hinweis: Zeigen Sie mit Aufagbe 15(i), daß $\int\limits_{\mathbb{R}^n} \hat{u}(y) e^{i\langle x,y\rangle} \mathrm{d}\mu(y) =$

$\lim\limits_{\varepsilon\to 0} \int\limits_{\mathbb{R}^n} \widehat{(\tau_{-x}u)}(y)\ \widehat{\Phi_\varepsilon}(y) \mathrm{d}\mu(y)$ und wenden Sie dann (i) und 15(ii) an.)

(iii) Für $u, v \in L^1(\mu)$ mit $\hat{u} = \hat{v}$ folgt $u = v$.

AUFGABE 19:
Es sei $u_0 \in C^0 \cap L^\infty(\mathbb{R}^n)$ und

$$u(t,x) := \int\limits_{\mathbb{R}^n} \theta(t, x-y)\ u_0(y) \mathrm{d}y,$$

wobei $\theta(t,x) := \frac{1}{(4\pi t)^{\frac{n}{2}}} \exp(-\frac{|x|^2}{4t})$ der Wärmeleitungskern ist. Zeigen Sie, daß die Anfangsdaten u_0 stetig angenommen werden, d.h.

$$\lim_{(t,x)\to(0,x_0)} u(t,x) = u_0(x_0).$$

(Hinweis: Vergleiche mit Satz von H.A. Schwarz.)

AUFGABE 20:
Es sei $\Omega \subseteq I\!R^n$ offen, beschränkt und mit C^1-Rand. Für $T>0$ sei $\Omega_T := \Omega\times]0,T[$. Wir betrachten $u \in C^{2,1}(\Omega_T) \cap C^{1,0}(\overline{\Omega_T})$, $f \in C^0(\overline{\Omega_T})$, $u_0 \in C^0(\overline{\Omega})$ mit

$$\begin{aligned} \partial_t u - \Delta u = f \quad &\text{in } \Omega_T, \\ u(0,.) = u_0 \quad &\text{in } \Omega \times \{0\}, \\ u = 0 \quad &\text{auf } (\partial\Omega) \times [0,T]. \end{aligned}$$

Zeigen Sie die Abschätzung

$$\sup_{t\in[0,T]} \int_\Omega |u(t,x)|^2 \mathrm{d}x + \int_0^T \int_\Omega |\nabla u(s,x)|^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}s \leq C(T)(\int_\Omega |u_0(x)|^2 \mathrm{d}x + \int_0^T \int_\Omega |f(s,x)|^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}s)$$

(Hinweis: Multiplizieren Sie die Differentialgleichung mit u und wenden Sie das Lemma von Gronwall an.)

AUFGABE 21: (Lemma von Gronwall)
Es seien $\kappa \in L^1(0,T)$, $\kappa \geq 0$ und $y, A \in L^\infty(0,T)$, die

$$y(t) \leq A(t) + \int_0^t \kappa(s) y(s) \mathrm{d}s$$

für $0 \leq t \leq T$ erfüllen. Zeigen Sie, daß die Abschätzung

$$y(t) \leq \sup_{s\in[0,t]} |A(s)| \ \exp(\int_0^t \kappa(s)\mathrm{d}s)$$

für $0 \leq t \leq T$.

Bearbeiten Sie drei der vier Aufgaben. Vergessen Sie bitte nicht, Ihren Namen auf Ihre Lösungsblätter zu schreiben. Abgabetermin ist Montag, 23.11.1998, von 9^{00} *Uhr bis* 9^{10} *Uhr.*