MATHEMATISCHES INSTITUT DER
ALBERT-LUDWIGS-UNIVERSITÄT FREIBURG

Prof. Dr. E. Kuwert
Dr. R. Schätzle

23.11.1998

Theorie partieller Differentialgleichungen I
WS 1998/99
6.Übung

AUFGABE 22: (Transportgleichung)
Bestimmen Sie eine Lösung der Transportgleichung

$$\begin{aligned} \partial_t u - \langle Du, b\rangle &= f \quad \text{auf } \mathbb{R}^n \times [0,\infty[, \\ u(x,0) &= g(x), \end{aligned}$$

wobei $g \in C^0(\mathbb{R}^n)$, $f \in C^0(\mathbb{R}^n \times [0,\infty[)$ und $b \in \mathbb{R}^n$ fest ist.

AUFGABE 23: (Abklingen in L^∞)
Zeigen Sie für die Lösung der homogenen Wellengleichung u auf $\mathbb{R}^3$, mit $u(.,0) = u_0 \in C_c^3(\mathbb{R}^3)$, $\partial_t u(.,0) = v_0 \in C_c^2(\mathbb{R}^3)$, daß

$$\limsup_{t\to\infty}\ t \parallel u(.,t) \parallel_{L^\infty(\mathbb{R}^3)} < \infty.$$

AUFGABE 24: (Lösungen der Wellengleichung mit Fouriertransformierten)
Wir betrachten eine Lösung $u \in C^2(\mathbb{R}^n \times [0,\infty[)$ der Wellengleichung, d.h.

$$\begin{aligned} \partial_t^2 u - \Delta u &= 0 \quad \text{auf } \mathbb{R}^n \times [0,\infty[, \\ u(x,0) &= 0, \\ \partial_t u(x,0) &= g(x), \end{aligned}$$

wobei $g \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$. Leiten Sie eine gewöhnliche Differentialgleichung für die Fouriertransformierte $\hat{u}$ her und geben Sie eine Integraldarstellung von u in Termen von $\hat{g}$ an.

AUFGABE 25: (Equipartition der Energie)
Für eine Lösung $u \in C^2(\mathbb{R} \times [0,\infty[)$ der eindimensionalen Wellengleichung, d.h.

$$\begin{aligned} \partial_t^2 u - \Delta u &= 0 \quad \text{auf } \mathbb{R} \times [0,\infty[, \\ u(x,0) &= g(x), \\ \partial_t u(x,0) &= h(x), \end{aligned}$$

wobei $g,h \in C_c^\infty(\mathbb{R})$, sei $k(t) := \frac{1}{2}\int\limits_{\mathbb{R}} |u_t(x,t)|^2 \mathrm{d}x$ die kinetische Energie und $p(t) := \frac{1}{2}\int\limits_{\mathbb{R}} |u_x(x,t)|^2 \mathrm{d}x$ die potentielle Energie. Zeigen Sie, daß die Summe der Energien $k(t)+p(t)$ konstant ist. Zeigen Sie weiter, daß für große Zeiten die Energien gleich sind, d.h. $k(t) = p(t)$.

Vergessen Sie bitte nicht, Ihren Namen auf Ihre Lösungsblätter zu schreiben. Abgabetermin ist Montag, 30.11.1998, von 9^{00} *Uhr bis* 9^{10} *Uhr.*