MATHEMATISCHES INSTITUT DER
ALBERT-LUDWIGS-UNIVERSITÄT FREIBURG

Prof. Dr. E. Kuwert
Dr. R. Schätzle

30.11.1998

Theorie partieller Differentialgleichungen I
WS 1998/99
7.Übung

AUFGABE 26: (Algebra der Sobolevfunktionen)
Zeigen Sie, daß $W^{1,p}(I\!R^n)$, $p > n$, eine Banachalgebra ist, insbesondere, daß die Abschätzung

$$\| u\ v \|_{W^{1,p}(I\!R^n)} \leq C \| u \|_{W^{1,p}(I\!R^n)} \| v \|_{W^{1,p}(I\!R^n)}$$

gilt.

AUFGABE 27: (Plancherel-Transformation)
Zeigen Sie folgende Aussagen.

(i) Für $u \in C_c^\infty(I\!R^n)$ gilt

$$\| \hat{u} \|_{L^2(\mu)} = \| u \|_{L^2(\mu)} .$$

(Hinweis: Verwenden Sie Aufgabe 15(ii), den Inversionssatz Aufgabe 18(ii) und beachten Sie, daß $\| u \|^2_{L^2(\mu)} = \int_{I\!R^n} u(x)\overline{u(x)} \mathrm{d}\mu(x)$, wobei $\bar{u}$ die komplex konjugierte von u ist.)

(ii) Es gibt genau eine lineare, orthogonale Abbildung $\mathcal{F} : L^2(\mu) \to L^2(\mu)$, die

$$\mathcal{F}u = \hat{u}$$

für $u \in L^1(\mu) \cap L^2(\mu)$ erfüllt.

AUFGABE 28: (Kritische Einbettung, isolierte Singularitäten)
Zeigen Sie, daß die Funktion $u(x) := log(log(\frac{e}{|x|}))$ für $n \geq 2$ in $W^{1,n}(B_1(0))$ liegt, aber unbeschränkt ist. Zeigen Sie weiter für $n = 2$, daß u eine schwache Lösung der Gleichung $-\Delta u = |Du|^2$ ist, d.h.

$$\int_{B_1(0)} \langle Du, D\varphi \rangle \mathrm{d}x = \int_{B_1(0)} |Du|^2 \varphi \mathrm{d}x$$

für $\varphi \in C_c^\infty(B_1(0))$.

AUFGABE 29: (Sobolevabbildungen zwischen Mannigfaltigkeiten)
Es sei $W^{1,2}_{loc}(I\!R^3, S^2) := \{ u \in W^{1,2}_{loc}(I\!R^3, I\!R^3) \mid |u(x)| = 1 \text{ fast überall} \}$. Zeigen Sie, daß $u(x) := \frac{x}{|x|}$ in diesem Raum liegt, aber nicht durch glatte Funktionen in diesem Raum approximiert werden kann, d.h $H \neq W$.
(Hinweis: Es sei ω die Flächenform auf S^2 , d.h. $\langle \omega(x), \xi \wedge \eta \rangle := det(x, \xi, \eta)$. Für glatte Abbildungen v gilt dann $dv^*\omega = v^* d\omega = 0$. Dagegen erfüllt $du^*\omega = 4\pi\delta_0$ im Distributionssinn, d.h. $-\int_{I\!R^3} d\eta \wedge u^*\omega = 4\pi\eta(0)$ für $\eta \in C_c^\infty(I\!R^3)$. Rechnen Sie dies nach und folgern Sie die Behauptung.)

Vergessen Sie bitte nicht, Ihren Namen auf Ihre Lösungsblätter zu schreiben. Abgabetermin ist Montag, 7.12.1998, von 9^{00} *Uhr bis* 9^{10} *Uhr.*