MATHEMATISCHES INSTITUT DER
ALBERT-LUDWIGS-UNIVERSITÄT FREIBURG

Prof. Dr. E. Kuwert
Dr. R. Schätzle

14.12.1998

Theorie partieller Differentialgleichungen I
WS 1998/99
9.Übung

AUFGABE 34: ($W^{1,\infty}(\mathbb{R}^n) = C^{0,1}(\mathbb{R}^n)$)
Zeigen Sie, daß jede beschränkte, lipschitzstetige Funktion f auf $\mathbb{R}^n$ beschränkte schwache Ableitungen besitzt, also in $W^{1,\infty}(\mathbb{R}^n)$ liegt.
(Hinweis: Glätten Sie f .)

AUFGABE 35: (Dualraum von $W^{1,2}(\mathbb{R}^n)$)
Für $F = (f_0, \ldots, f_n) \in L^2(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^{n+1})$ sei $\Lambda_F : W^{1,2}(\mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$\Lambda_F(u) := \int_{\mathbb{R}^n} f_0 u + (f_1, \ldots, f_n)\nabla u$$

für $u \in W^{1,2}(\mathbb{R}^n)$. Zeigen Sie folgende Aussagen.

(i) Λ_F ist stetig, linear und erfüllt

$$\| \Lambda_F \| \leq \| F \|_{L^2} .$$

(ii) Zu jedem $\Gamma \in (W^{1,2}(\mathbb{R}^n))'$ gibt es ein $F \in L^2(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^{n+1})$ mit $\Gamma = \Lambda_F$.

(iii) Für $F = (f_0, \ldots, f_n) \in L^2(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^{n+1})$ gilt

$$\Lambda_F = 0 \Longleftrightarrow div\ (f_1, \ldots, f_n) = f_0 \quad \text{schwach in } \mathbb{R}^n.$$

Zusammenfassend: $\Lambda : L^2(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^{n+1}) \to (W^{1,2}(\mathbb{R}^n))'$ mit $(F \mapsto \Lambda_F)$ ist stetig, linear und hat Norm ≤ 1 . Weiter ist Λ surjektiv und $ker\ \Lambda = \{(f_0, \ldots, f_n) \mid div\ (f_1, \ldots, f_n) = f_0\ \}$.

AUFGABE 36: (Trennungssatz für konvexe Mengen)
Zeigen Sie folgende Aussagen.

(i) Es sei $C \subseteq X$ eine konvexe Teilmenge eines Vektorraumes X . Es gibt zu jedem sublinearen Funktional $p : X \to \mathbb{R}$ ein lineares Funktional $f : X \to \mathbb{R}$ mit $f \leq p$ und $\inf_C p = \inf_C f$.
(Hinweis: Betrachten Sie das sublineare Funktional $\tilde{p}(x) := \inf\{p(x + ty) - t\alpha \mid y \in C,\ t > 0\}$ mit $\alpha = \inf_C p$.)

(ii) Nun seien A, B zwei nichtleere, konvexe Teilmengen eines Banachraumes, die postiven Abstand haben. Dann gibt es ein stetiges, lineares Funktional f auf X und $\gamma \in \mathbb{R}$ so, daß

$$\sup_B f < \gamma < \inf_A f.$$

(Hinweis: Wenden Sie (i) auf $C := A - B$ und $p = \| . \|$ an.)

(iii) Konvexe, abgeschlossene Mengen sind schwach abgeschlossen.

Vergessen Sie bitte nicht, Ihren Namen auf Ihre Lösungsblätter zu schreiben. Abgabetermin ist Montag, 21.12.1998, von 9^{00} *Uhr bis* 9^{10} *Uhr.*