MATHEMATISCHES INSTITUT DER
ALBERT-LUDWIGS-UNIVERSITÄT FREIBURG

Prof. Dr. E. Kuwert
T. Müller

19. Oktober 1999

Funktionalanalysis I
WS 1999/00
Übungsblatt 1

AUFGABE 1: Sei

$$\ell^p := \left\{ \mathbf{x} = (x^i)_{i\in\mathbb{N}} : x^i \in \mathbb{R},\ \|\mathbf{x}\|_p = \left(\sum_{i=1}^{\infty} |x^i|^p \right)^{1/p} < \infty \right\}$$

für ein $p \in [1,\infty)$. Zeigen Sie, daß $(\ell^p, \|\cdot\|_p)$ ein Banachraum ist.

AUFGABE 2: Zeigen Sie, daß auf $C^0([0,1])$ durch

$$\|u\|_{L^2} := \left(\int_0^1 |u(x)|^2 dx \right)^{1/2}$$

eine Norm definiert ist, daß aber $\left(C^0([0,1]), \|\cdot\|_{L^2}\right)$ kein Banachraum ist.

AUFGABE 3: Sei (X,d) ein metrischer Raum, $Y \subset X$. Man zeige:

(i) Ist (Y,d) vollständig, so ist $Y \subset X$ abgeschlossen.

(ii) Ist (X,d) vollständig und Y abgeschlossen, so ist (Y,d) vollständig.

AUFGABE 4: Es seien $X := \left(C^0([0,1]), \|\cdot\|_\infty\right)$ und $V := C^\infty([0,1])$. Man zeige für $u \in X$:

$$\mathrm{dist}(u,V) = 0.$$

Vergessen Sie bitte nicht, Ihren Namen auf Ihre Lösungsblätter zu schreiben. Abgabetermin ist Mittwoch, 27.10.1999.