MATHEMATISCHES INSTITUT DER
ALBERT-LUDWIGS-UNIVERSITÄT FREIBURG

Prof. Dr. E. Kuwert
T. Müller

7. Januar 2000

Funktionalanalysis I
WS 1999/00
Übungsblatt 11

AUFGABE 1: (*Dualraum von* $W_0^{1,2}(\Omega)$)
Sei $X = L^2(\Omega) \times L^2(\Omega, \mathbb{R}^n)$. Betrachten Sie die Abbildungen $J : W_0^{1,2}(\Omega) \to X$, $Ju = (u, Du)$ und $P : X \to W_0^{1,2}(\Omega)'$, $P(f,F)(u) = \int_\Omega fu + \langle F, Du\rangle$. Die Norm auf $W_0^{1,2}(\Omega)$ sei so gewählt, daß J isometrisch einbettet. Zeigen Sie:
(1) $X = \ker P \oplus \text{Bild } J$. (Orthogonale Zerlegung in abgeschlossene Unterräume).
(2) P ist surjektiv, und für $\varphi \in W_0^{1,2}(\Omega)'$ gilt $\|\varphi\| = \inf\{\|(f,F)\|_{L^2} : P(f,F) = \varphi\}$.

AUFGABE 2: (*Kettenregel für schwache Ableitung*)
Sei $u \in L^1_{loc}(\Omega)$ mit $Du \in L^1_{loc}(\Omega)$. Zeigen Sie, daß dann auch $|u| \in W^{1,1}_{loc}(\Omega)$ gilt, und zwar mit $D(|u|) = \text{sign}(u)Du$.
Anleitung: Approximieren Sie die Betragsfunktion durch $f_\epsilon(z) = \sqrt{z^2 + \epsilon^2}$.

AUFGABE 3: (*Natürliche Randbedingung*)
Begründen Sie für das Randwertproblem
(1) $-\text{div}(aDv) = f$ in Ω, $Dv \cdot a\nu$ auf $\partial\Omega$ (ν die äußere Einheitsnormale)
die schwache Formulierung
(2) $\int_\Omega \langle Du, aDv\rangle = \int_\Omega fu$ für alle $u \in W^{1,2}(\Omega)$,
wobei a elliptisch, symmetrisch und beschränkt. Dazu ist zu zeigen, daß (1) und (2) unter geeigneten Regularitätsbedingungen an Ω, a, f und v äquivalent sind.
Beweisen Sie außerdem, daß eine Lösung v von (2) das Funktional $Q(u) = \frac{1}{2}\int_\Omega \langle Du, aDu\rangle - \int_\Omega fu$ auf dem Raum $W^{1,2}(\Omega)$ minimiert.

AUFGABE 4: (*Greenscher Operator*)
Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt sowie $a \in L^\infty(\Omega, M_n(\mathbb{R}))$ elliptisch. Betrachten Sie $G = I \circ L^{-1} \circ I' : L^2(\Omega) \to L^2(\Omega)$ mit
$L : W_0^{1,2}(\Omega) \to W_0^{1,2}(\Omega)'$, $(Lv)(u) = \int_\Omega \langle Du, aDv\rangle$,
$I : W_0^{1,2}(\Omega) \to L^2(\Omega)$, $Iv = v$
und
$I' : L^2(\Omega) \to W_0^{1,2}(\Omega)'$, $(I'f)(u) = \int_\Omega fu$.
Verifizieren Sie $LGf = f$ und zeigen Sie im Fall a symmetrisch, daß G bzgl. $\langle\cdot,\cdot\rangle_{L^2}$ ein selbstadjungierter Operator ist, also $G = G^*$.
Vergessen Sie bitte nicht, Ihren Namen auf Ihre Lösungsblätter zu schreiben. Abgabetermin ist Montag, 17.1.2000.