MATHEMATISCHES INSTITUT DER
ALBERT-LUDWIGS-UNIVERSITÄT FREIBURG

Prof. Dr. E. Kuwert
T. Müller

17. Januar 2000

Funktionalanalysis I
WS 1999/00
Übungsblatt 12

AUFGABE 1: (*Kompakte Einbettungen*)
Seien $X_1 \subset X_2 \subset X_3$ stetige Inklusionen von Banachräumen, und $X_1 \subset X_2$ sogar kompakt. Beweisen Sie durch Widerspruch für $\varepsilon > 0$ die Existenz einer Konstanten $c(\varepsilon) < \infty$ mit

$$\|x\|_2 \leq \varepsilon \|x\|_1 + c(\varepsilon)\|u\|_3 \;\; \forall x \in X_1.$$

Folgern Sie für $0 \leq \beta < \alpha, \Omega$ offen und beschränkt,

$$[u]_{\beta,\Omega} \leq \varepsilon [u]_{\alpha,\Omega} + c\|u\|_{C^0(\Omega)} \;\; \forall u \in C^{0,\alpha}(\overline{\Omega}).$$

Dabei ist $[u]_{\alpha,\Omega}$ die α-Hölderkonstante von u und $c = c(\varepsilon, \alpha, \beta, \Omega)$.

AUFGABE 2: (*Hilbert-Schmidt-Integraloperatoren*)
Betrachten Sie für $k \in L^2(I \times I, \mathbb{C}), I = (0,1)$, den Operator $K : L^2(I, \mathbb{C}) \to L^2(I, \mathbb{C})$ mit $(Kf)(x) = \int_I k(x,y)f(y)dy$. Beweisen Sie der Reihenfolge nach:

a) K ist wohldefiniert und stetig mit $\|K\| \leq \|k\|_{L^2(I\times I,\mathbb{C})}$.

b) Der Operator K^* (Hilbertraumadjungierte) hat eine entsprechende Integraldarstellung, und zwar mit $k^*(x,y) = \overline{k(y,x)}$.

c) K ist ein kompakter Operator (verwenden Sie, daß Linearkombinationen von Produktfunktionen $w(x,y) = u(x)v(y)$ dicht in $L^2(I \times I)$ sind).

AUFGABE 3:
Bestimmen Sie die Hilbertraumadjungierte des Ableitungsoperators

$$D : W_0^{1,2}(\Omega) \to L^2(\Omega, \mathbb{R}^n).$$

Vergessen Sie bitte nicht, Ihren Namen auf Ihre Lösungsblätter zu schreiben. Abgabetermin ist Montag, 24.1.2000.