MATHEMATISCHES INSTITUT DER
ALBERT-LUDWIGS-UNIVERSITÄT FREIBURG

Prof. Dr. E. Kuwert
T. Müller

24. Januar 2000

Funktionalanalysis I
WS 1999/00
Übungsblatt 13

AUFGABE 1:
Betrachten Sie für $I = (0, \infty)$ und $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ $A_\lambda : W_0^{1,2}(I) \to L^2(I)$, $A_\lambda u = u' + \lambda u$. Beweisen Sie folgende Aussagen:

(1) $\|u'\|_{L^2} \leq \|A_\lambda u\|_{L^2}$, $\|u\|_{L^2} \leq \frac{1}{|\lambda|}\|A_\lambda u\|_{L^2}$.

(2) A_λ ist injektiv und hat abgeschlossenes Bild.

(3) $(\mathrm{Bild} A_\lambda)^\perp = \{0\}$ und $\mathrm{ind}(A_\lambda) = 0$ für $\lambda > 0$, $(\mathrm{Bild} A_\lambda)^\perp = \mathrm{Span}\{e^{\lambda x}\}$ und $\mathrm{ind}(A_\lambda) = -1$ für $\lambda < 0$.

(4) Der Operator $A_0 u = u'$, das heißt $\lambda = 0$, ist injektiv, jedoch ist $\mathrm{Bild} A_0$ dicht und nicht abgeschlossen.

(*Hinweis: Verwenden Sie die Vertauschbarkeit von Glättung und schwacher Ableitung.*)

AUFGABE 2:
Zeigen Sie, daß das unendliche Gleichungssystem

$$x_i + \sum_{j=1}^{\infty} a_{ij} x_j = b_i \quad (1 \leq i < \infty)$$

für jedes $b \in \ell^2(\mathbb{R})$ eine eindeutige Lösung $x \in \ell^2(\mathbb{R})$ besitzt, falls für jedes $N \in \mathbb{N}$ die Matrix $(a_{ij})_{1 \leq i,j \leq N}$ positiv semidefinit ist und falls $\sum_{i,j=1}^{\infty} a_{ij}^2 < \infty$.

AUFGABE 3: (*Lösbarkeit des Neumannproblems*)
Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet mit C^1-Rand. Für $a \in L^\infty(\Omega, M_n(\mathbb{R}))$ und $q \in L^\infty(\Omega)$ sei L der schwach definierte Operator $L : W^{1,2}(\Omega \to W^{1,2}(\Omega)'$, $Lv = -\mathrm{div}(aDv) + qv$. Dabei sei a symmetrisch und elliptisch mit Konstante $\mu > 0$. Zeigen Sie:

(1) L ist Isomorphismus, falls $q(x) \geq \lambda > 0$ für alle $x \in \Omega$.

(2) L ist ein Fredholmoperator mit Index Null.

(3) Für die Existenz einer schwachen Lösung des Neumannproblems $-\mathrm{div}(aDv) = f$ mit $f \in L^2(\Omega)$, $Dv \cdot a\nu = 0$ auf $\partial\Omega$ ist die Bedingung $\int_\Omega f = 0$ notwendig und hinreichend.

(*Hinweis: Die Einbettung* $W^{1,2}(\Omega) \subset L^2(\Omega)$ *ist für beschränkte* C^1*-Gebiete kompakt (Satz von Rellich); dies soll ohne Beweis benutzt werden.)*

Vergessen Sie bitte nicht, Ihren Namen auf Ihre Lösungsblätter zu schreiben. Abgabetermin ist Montag, 31.1.2000.