MATHEMATISCHES INSTITUT DER
ALBERT-LUDWIGS-UNIVERSITÄT FREIBURG

Prof. Dr. E. Kuwert
T. Müller

31. Januar 2000

Funktionalanalysis I
WS 1999/00
Übungsblatt 14

AUFGABE 1: (*Lösbarkeitskriterium*)
Betrachten Sie den in der Vorlesung definierten Operator $L : W_0^{1,2}(\Omega) \to W_0^{1,2}(\Omega)'$, $L = L_0 + K$ mit meßbaren Koeffizienten a, b, c, q. L_0 sei elliptisch mit Konstante $\mu > 0$. Beweisen Sie für $\varphi \in W_0^{1,2}(\Omega)'$ die Äquivalenz folgender Aussagen (und damit Satz 8):

(1) $Lv = \varphi$ besitzt eine Lösung $v \in W_0^{1,2}(\Omega)$.

(2) $\varphi(u) = 0$ für alle $u \in \ker L^*$.

Dabei ist $L^* := L' \circ I$, und $I : W^{1,2}(\Omega) \to W^{1,2}(\Omega)''$ die kanonische Einbettung. Was bedeutet (2), wenn die rechte Seite eine L^2-Funktion f ist?

AUFGABE 2: (*Spektrum von Multiplikationsoperatoren*)
Bestimmen Sie für den Operator $(Tf)(x) = xf(x)$ auf dem Banachraum $C^0(I, \mathbb{C}), I = [0,1]$, mit Norm $\|f\| = \max_{x \in I} |f(x)|$, die Spektralwerte und deren Typ.

AUFGABE 3:
Zeigen Sie für $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$ die Äquivalenz:

$$f \in \mathrm{Lip}(\mathbb{R}^n) \Leftrightarrow Df \in L^\infty(\mathbb{R}^n).$$

Anleitung:
„$\Rightarrow$ “: Gewinnen Sie $D_i f$ als Grenzwert von Differenzenquotienten $D_i^h f(x) := \frac{f(x+he_i)-f(x)}{h}$.
„$\Leftarrow$ “: Glättung.

AUFGABE 4: (L^2-*Randabschätzungen*)
Es seien Ω ein beschränktes, offenes Gebiet mit C^2-Rand und $u \in W^{1,2}_{loc}(\Omega)$ eine Lösung von

$$\int_\Omega a^{ij} D_i u D_j \varphi = \int_\Omega f\varphi \qquad \forall \varphi \in W_0^{1,2}(\Omega),$$

wobei $f \in L^2(\Omega)$, a^{ij} elliptisch mit Konstante $\mu > 0$ und Lipschitzstetig. Zeigen Sie die Abschätzung

$$\|u\|_{W^{2,2}(\Omega)} = c(\mu, n, \Omega) \left(\|u\|_{W^{1,2}(\Omega)} + \|f\|_{L^2(\Omega)} \right) .$$

Anleitung: Zeigen Sie zuerst, daß durch lokales "Geradebiegen" von $\partial\Omega$ in einer Randpunktumgebung die Gleichung in eine Gleichung derselben Struktur überführt wird. Schätzen Sie dann die tangentialen Ableitungen durch Differenzenquotientenverfahren ab wie in der Vorlesung und gewinnen Sie eine Abschätzung für die normale Ableitung aus der Elliptizität der Gleichung.

Vergessen Sie bitte nicht, Ihren Namen auf Ihre Lösungsblätter zu schreiben. Abgabetermin ist Montag, 7.2.2000.