MATHEMATISCHES INSTITUT DER
ALBERT-LUDWIGS-UNIVERSITÄT FREIBURG

Prof. Dr. E. Kuwert
T. Müller

7. Februar 2000

Funktionalanalysis I
WS 1999/00
Übungsblatt 15

**AUFGABE 1:**
Beweisen Sie, daß für $I = [0,1]$ der Operator $K : C^0(I) \to C^0(I)$, $(Kf)(x) = \int_0^x f(\xi)d\xi$ kompakt ist, aber keinen Eigenwert besitzt.

**AUFGABE 2:**
Sei $X$ ein reeller Hilbertraum, $K \in L(X,X)$ kompakt, selbstadjungiert und positiv semidefinit (also $\langle Kx, x\rangle \geq 0 \quad \forall x$). Zeigen Sie, daß Eigenwerte $\lambda_k$ und Eigenvektoren $v_k \quad (k \geq 1)$ auch induktiv wie folgt bestimmt werden können:

$$\lambda_k = \sup\{\langle Kx, x\rangle : \|x\| = 1,\ x \perp V_k\},$$

$$v_k = \text{zugehörige Maximumstelle},$$

$$V_k = \text{span}\{v_1, ..., v_k\} \text{ und } V_0 = \{0\}.$$

Werden hierdurch alle Eigenvektoren erfaßt?

**AUFGABE 3:**
Betrachten Sie auf $L^2(I)$, $I = [0,1]$ den Hilbert-Schmidt-Integraloperator

$$(Gv)(x) = \int_I g(x,y)v(y)dy$$

mit

$$g(x,y) = \begin{cases} (1-x)y & \text{für} \quad 0 \leq y \leq x \\ (1-y)x & \text{für} \quad x \leq y \leq 1 \end{cases}$$

Zeigen Sie: Die Eigenwerte von $G$ sind $\left(\frac{1}{j\pi}\right)^2$, $j \in \mathbb{N}$, mit Eigenfunktionen $v_j = \sin(j\pi x)$. Die Eigenfunktionen bilden eine Hilbertbasis von $L^2(I)$. Diskutieren Sie mit dem Ansatz $f = \sum\limits_{j=1}^{\infty} c_j v_j$ die Lösbarkeit der Gleichung $(G - \lambda \text{id})v = f$.

*Vergessen Sie bitte nicht, Ihren Namen auf Ihre Lösungsblätter zu schreiben. Abgabetermin ist Montag, 14.2.2000.*