MATHEMATISCHES INSTITUT DER
ALBERT-LUDWIGS-UNIVERSITÄT FREIBURG

Prof. Dr. E. Kuwert
T. Müller

26. Oktober 1999

Funktionalanalysis I
WS 1999/00
Übungsblatt 2

AUFGABE 1: (Fortsetzungsprinzip)
Es seien X, Y metrische Räume und $A \subset X$ eine dichte Teilmenge. Zeigen Sie: Ist $f : A \longrightarrow Y$ gleichmäßig stetig, dann hat f eine eindeutig bestimmte stetige Fortsetzung $F : X \longrightarrow Y$, und diese ist gleichmäßig stetig.

AUFGABE 2: (Vervollständigung)
Seien X ein normierter Raum mit induzierter Metrik $d(x,y) = \|x-y\|$ und $(\widehat{X}, \widehat{d})$ seine Vervollständigung. Zeigen Sie, daß $\widehat{X}$ kanonisch ein Banachraum ist.

AUFGABE 3: (Norm von Fredholmintegraloperatoren)
Seien $I = [0,\, 1]$, $k \in C^0(I \times I)$ und

$$K : C^0(I) \longrightarrow C^0(I), \quad (Kf)(x) = \int_I k(x,y) f(y)\, dy.$$

Berechnen Sie die Operatornorm von K bezüglich der Supremumsnorm $\|\cdot\|_{L^\infty}$ auf $C^0(I)$.

AUFGABE 4: (Klassische Funktionenräume)
Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt, und für $k \in \mathbb{N}_0$ sei

$$C^k(\overline{\Omega}) = \{u \in C^k(\Omega) \;\;:\;\; \text{alle Ableitungen } \partial_\alpha u \text{ der Ordnung } |\alpha| \leq k \text{ sind stetig auf } \overline{\Omega} \text{ fortsetzbar}\}.$$

Zeigen Sie, daß $C^k(\overline{\Omega})$ mit der Norm $\|u\|_{C^k(\Omega)} = \sum_{|\alpha| \leq k} \|\partial_\alpha u\|_{L^\infty(\Omega)}$ ein Banachraum ist.

Hinweis: Betrachten Sie erst die Fälle $k = 0$ und $k = 1$.

Vergessen Sie bitte nicht, Ihren Namen auf Ihre Lösungsblätter zu schreiben. Abgabetermin ist Mittwoch, der 03.11.1999.