MATHEMATISCHES INSTITUT DER
ALBERT-LUDWIGS-UNIVERSITÄT FREIBURG

Prof. Dr. E. Kuwert
T. Müller

3. November 1999

Funktionalanalysis I
WS 1999/00
Übungsblatt 3

AUFGABE 1: (Kompaktheit von Fredholmoperatoren)
Seien $I = [0, 1]$, $k \in C^0(I \times I)$ und

$$K : C^0(I) \longrightarrow C^0(I), \quad (Kf)(x) = \int_I k(x,y) f(y)\, dy.$$

Zeigen Sie, daß $\{Kf \,:\, \|f\|_{C^0(I)} \leq 1\}$ relativ kompakt in $C^0(I)$ ist und folgern Sie hieraus, daß $Id + K$ einen endlichdimensionalen Kern hat.

AUFGABE 2: (Mengen in ℓ^2)
Untersuchen Sie folgende Mengen auf Beschränktheit und Kompaktheit:

$$\begin{aligned} E_1 &= \left\{ x \in \ell^2 \,:\, |x^i| \leq \frac{1}{\sqrt{i}} \quad \text{für alle } i \right\}, \\ E_2 &= \left\{ x \in \ell^2 \,:\, \sum_{i=1}^{\infty} \left(x^i\right)^2 \leq 1 \right\}, \\ E_3 &= \left\{ x \in \ell^2 \,:\, |x^i| \leq \frac{1}{i} \quad \text{für alle } i \right\}. \end{aligned}$$

AUFGABE 3: (Hausdorffabstand)
Sei $\mathcal{A}$ die Menge der nichtleeren, abgeschlossenen und beschränkten Teilmengen von $\mathbb{R}^n$. Zeigen Sie:

a) $d(A_1, A_2) = \inf\{\epsilon > 0 \,:\, A_1 \subset B_\epsilon(A_2),\ A_2 \subset B_\epsilon(A_1)\}$ ist eine Metrik auf $\mathcal{A}$.

b) Die Menge $\{A \in \mathcal{A} \,:\, A \subset \overline{B_R(0)}\}$ ist kompakt.

Hinweis: Wenden Sie für b) den Satz von Arzelà-Ascoli auf die Funktionen $f_A : \overline{B_R(0)} \longrightarrow [0, \infty)$, $f_A(x) = \operatorname{dist}(x, A)$ an.

AUFGABE 4: (Endlichdimensionale Komplemente)
Sei V ein abgeschlossener Unterraum des normierten Raumes X mit Kodimension $\dim X/V = N < \infty$. Bestimmen Sie ein Komplement W, also $X = V \oplus W$ (direkte Summe). Geben Sie einen Isomorphismus

$$\Phi : (V \times W, \|(v,w)\| = \|v\| + \|w\|) \longrightarrow (X, \|\cdot\|)$$

an (d.h. Φ, Φ^{-1} sind stetig).

Vergessen Sie bitte nicht, Ihren Namen auf Ihre Lösungsblätter zu schreiben. Abgabetermin ist Montag, der 08.11.1999.