MATHEMATISCHES INSTITUT DER
ALBERT-LUDWIGS-UNIVERSITÄT FREIBURG

Prof. Dr. E. Kuwert
T. Müller

8. November 1999

Funktionalanalysis I
WS 1999/00
Übungsblatt 4

AUFGABE 1:
Zeigen Sie, daß die Abbildung

$$I : L^1(\mathbb{R}) \longrightarrow L^\infty(\mathbb{R})', \quad I(f)(g) = \int_{\mathbb{R}} fg$$

isometrisch (normerhaltend) ist, jedoch nicht surjektiv. Konstruieren Sie dazu ein $\phi \in L^\infty(\mathbb{R})'$ mit $\phi(g) = g(0)$ für jedes $g \in (L^\infty \cap C^0)(\mathbb{R})$.

AUFGABE 2:
Weisen Sie die Stetigkeit des Operators

$$L : C^{2,\alpha}(\overline{\Omega}) \longrightarrow C^{0,\alpha}(\overline{\Omega}), \quad Lu = \sum_{i,j=1}^{n} a^{ij}\partial^2_{ij}u + \sum_{i=1}^{n} b^i\partial_i u + qu$$

nach, falls a^{ij}, b^i, $q \in C^{0,\alpha}(\overline{\Omega})$.

AUFGABE 3:
Sei $\ell^\infty(\mathbb{R})$ der Vektorraum der beschränkten, reellen Folgen mit Norm $\|x\|_\infty = \sup_{i\in\mathbb{N}} |x^i|$. Konstruieren Sie ein Funktional $\Phi \in \ell^\infty(\mathbb{R})'$ mit $\|\Phi\| = 1$ und folgenden Eigenschaften:

a) $\Phi(x) = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} x^i$, falls der Grenzwert existiert,

b) $\liminf\limits_{i\to\infty} x^i \leq \Phi(x) \leq \limsup\limits_{i\to\infty} x^i$,

c) $\Phi((x^1, x^2, x^3, \ldots)) = \Phi((x^2, x^3, \ldots))$.

AUFGABE 4:
Sei $M \subset \mathbb{R}^n$ konvex. Zeigen Sie, daß in jedem $x_0 \in \partial M$ eine Stützhyperebene existiert, d.h. es gibt ein $\nu \in \mathbb{R}^n$, $|\nu| = 1$, mit

$$M \subset \{x : \langle x - x_0, \nu\rangle \geq 0\}.$$

AUFGABE 5:
Sei X Vektorraum und $A \subset X$. Es bezeichne

$$\operatorname{conv}(A) := \left\{ \sum_{i=1}^{k} \alpha_i x_i \,:\, k \in \mathbb{N},\, x_i \in A,\, \alpha_i \geq 0,\, \sum \alpha_i = 1 \right\}$$

die konvexe Hülle von A. Zeigen Sie:

a) $\operatorname{conv}(A)$ ist konvex und $\operatorname{conv}(A) = \bigcap U$, $U \supseteq A$, U ist konvex

b) A offen $\Longrightarrow \operatorname{conv}(A)$ offen

c) A konvex $\Longrightarrow \overline{A}, \mathring{A}$ konvex

d) Zeigen Sie an einem Beispiel, daß $\operatorname{conv}(A)$ nicht abgeschlossen zu sein braucht, falls A abgeschlossen ist.

Bearbeiten Sie vier der fünf Aufgaben. Vergessen Sie bitte nicht, Ihren Namen auf Ihre Lösungsblätter zu schreiben. Abgabetermin ist Montag, der 15.11.1999.