MATHEMATISCHES INSTITUT DER
ALBERT-LUDWIGS-UNIVERSITÄT FREIBURG

Prof. Dr. E. Kuwert
T. Müller

15. November 1999

Funktionalanalysis I
WS 1999/00
Übungsblatt 5

AUFGABE 1: Beweisen Sie die Folgerungen 4 und 5 aus §3 der Vorlesung.
Folgerung 4: A, B konvex, $A \cap B = \emptyset$, A abgeschlossen, B kompakt. Dann können A, B strikt getrennt werden.
Folgerung 5: K konvex, $0 \notin K$. Dann gibt es $\varphi \in X'$ mit $\|\varphi\| = 1$ und $\varphi(x) \leq -\mathrm{dist}(0, K)\ \forall x \in K$.

AUFGABE 2: Sei X ein Banachraum, Y normierter Raum und $T_n \in L(X,Y)$ für $n \in \mathbb{N}$ punktweise konvergent, d.h. für $x \in X$ existiert $T(x) := \lim\limits_{n\to\infty} T_n x$. Zeigen Sie:
(1) $T \in L(X,Y)$ und $\|T\| \leq \liminf\limits_{n\to\infty} \|T_n\|$.
(2) Finden Sie ein Beispiel für „ $<$ " in der Ungleichung (1).

AUFGABE 3: Zeigen Sie, daß eine Teilmenge eines Banachraumes genau dann beschränkt ist, wenn gilt:

$$\sup\{\varphi(x) : x \in A\} < \infty \text{ für alle } \varphi \in X'.$$

AUFGABE 4: Seien $P, Q : X \to X$ linear mit $[P,Q] := PQ - QP = id$. Dann können nicht P und Q beide stetig sein.
Hinweis: Zeigen Sie $PQ^n - Q^nP = nQ^{n-1}$.

AUFGABE 5: Seien X, Y Banachräume und $T : D(T) \to Y$ ($D(T)$ linearer Unterraum von X) eine lineare Abbildung. Dann heißt T abschließbar, falls $\overline{\mathrm{graph}(T)}$ wieder ein Graph ist. Zeigen Sie:
(1) T ist genau dann abschließbar, wenn stets gilt: Ist $x_n \in D(T)$, $x_n \to 0$, $Tx_n \to y$, so folgt $y = 0$.
(2) Betrachten Sie $X = Y = L^2(\Omega)$ für $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, sowie einen Differentialoperator der Ordnung k

$$T = \sum_{|\alpha| \leq k} a_\alpha D^\alpha \text{ mit } a_\alpha \in C^\infty(\Omega),$$

wobei $D(T) = \{u \in C^\infty(\Omega) : u \in X,\ T(u) \in Y\}$. Zeigen Sie, daß T abschließbar ist.

Bearbeiten Sie vier der fünf Aufgaben. Vergessen Sie bitte nicht, Ihren Namen auf Ihre Lösungsblätter zu schreiben. Abgabetermin ist Montag, 22.11.1999.