MATHEMATISCHES INSTITUT DER
ALBERT-LUDWIGS-UNIVERSITÄT FREIBURG

Prof. Dr. E. Kuwert
T. Müller

23. November 1999

Funktionalanalysis I
WS 1999/00
Übungsblatt 6

AUFGABE 1: Sei $f_n \geq 0$ eine Folge integrierbarer Funktionen, die monoton fällt: $f_1 \geq f_2 \geq f_3 \geq \ldots$. Es gelte

$$\lim_{n\to\infty} \int f_n d\mu = 0.$$

Zeigen Sie, daß f_n fast überall gegen 0 konvergiert. Kann die Voraussetzung über die Monotonie dabei fallen gelassen werden?

AUFGABE 2: Sei $u \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ mit

$$\int |u| + \int |Du| < \infty.$$

Konstruieren Sie Funktionen $u_k \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ mit

$$\int |u - u_k| + \int |Du - Du_k| \to 0.$$

AUFGABE 3: Finden Sie zu gegebenem $u \in C^0(\Omega)$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, eine Folge $u_j \in C^\infty(\Omega)$ mit

$$\sup_{x\in K} |u(x) - u_j(x)| \to 0$$

für jede kompakte Teilmenge $K \subset\subset \Omega$.

AUFGABE 4: Die Cantormenge ist definiert als Schnitt $\bigcap_{n=0}^\infty C_k$, wobei C_1 aus $C_0 := [0,1]$ durch Entfernen des Intervalls $I_1 := (\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$ entsteht und C_k aus C_{k-1} durch Anwendung dieses Verfahrens auf die Teilintervalle von C_{k-1}.
Definieren Sie eine Funktion $f \in C^0([0,1])$, die auf I_1 gleich $\frac{1}{2}$, auf den im zweiten Schritt entfernten Intervallen gleich $\frac{1}{4}$ bzw. $\frac{3}{4}$ usw. ist; dabei soll f monoton wachsend sein. Zeigen Sie, daß fast überall $f'(x) = 0$ gilt.

Vergessen Sie bitte nicht, Ihren Namen auf Ihre Lösungsblätter zu schreiben. Abgabetermin ist Montag, 29.11.1999. Entschuldigung für die Verspätung!