MATHEMATISCHES INSTITUT DER
ALBERT-LUDWIGS-UNIVERSITÄT FREIBURG

Prof. Dr. E. Kuwert
T. Müller

29. November 1999

Funktionalanalysis I
WS 1999/00
Übungsblatt 7

AUFGABE 1: Sei μ ein Maß auf X mit $\mu(X) = 1$, und $u : X \to [0, \infty)$ meßbar. Bestimmen Sie die Grenzwerte, falls existent, der Funktion

$$\phi(p) = \left(\int_X u^p d\mu \right)^{1/p}$$

für $p \to \infty$ und $p \to -\infty$.

AUFGABE 2: In der Vorlesung wurde gezeigt, daß $\ell^\infty(\mathbb{R})$ nicht separabel ist. Folgern Sie:
$L^\infty(\mu)$ nicht separabel $\Leftrightarrow$ dim $L^\infty(\mu) < \infty$.

AUFGABE 3: Sei $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$, $1 \leq p < \infty$ und $\xi \in \mathbb{R}^n$. Dann konvergieren die Funktionen $f_h(x) = \frac{1}{h} \int_0^h f(x + t\xi) dt$ für $h \searrow 0$ in $L^p(\mathbb{R}^n)$ gegen f.

AUFGABE 4: Bestimmen Sie die Dualräume der Folgenräume

$$c_0 = \{x \in \ell^\infty(\mathbb{R}) : \lim_{i \to \infty} x^i = 0\},$$
$$c = \{x \in \ell^\infty(\mathbb{R}) : \lim_{i \to \infty} x^i \text{ existiert}\}.$$

AUFGABE 5: Sei X ein normierter $\mathbb{R}$-Vektorraum. Zeigen Sie die Äquivalenz folgender Eigenschaften:

(i) X ist *strikt normiert*, d.h. für $x, y \in X$ gilt

$$\|x + y\| = \|x\| + \|y\| \Rightarrow x, y \text{ linear abhängig}$$

(ii) Die Einheitskugel $B_1(0) \subset X$ ist strikt konvex, d.h.

$$\|x\| = \|y\| = 1, \;\; x \neq y \Rightarrow \left\| \frac{x + y}{2} \right\| < 1$$

(iii) Jede konvexe Teilmenge $K \subset X$ besitzt *höchstens* ein Element minimaler Norm.

Bearbeiten Sie bitte 4 der 5 Aufgaben. Vergessen Sie bitte nicht, Ihren Namen auf Ihre Lösungsblätter zu schreiben. Abgabetermin ist Montag, 6.12.1999.