MATHEMATISCHES INSTITUT DER
ALBERT-LUDWIGS-UNIVERSITÄT FREIBURG

Prof. Dr. E. Kuwert
T. Müller

6. Dezember 1999

Funktionalanalysis I
WS 1999/00
Übungsblatt 8

AUFGABE 1: Sei X ein reflexiver Banachraum und $F : X \to \mathbb{R}$ habe die folgenden Eigenschaften:
(i) F ist unterhalbstetig bzgl. schwacher Konvergenz:

$$x_k \to x \text{ schwach } \Rightarrow F(x) \leq \liminf_{k \to \infty} F(x_k)$$

(ii) F ist koerziv: $\lim\limits_{\|x\| \to \infty} F(x) = \infty$
(iii) F ist nach unten beschränkt: $m = \inf\limits_{x \in X} F(x) > -\infty$.
Dann gibt es ein $x_0 \in X$ mit $F(x_0) = m$.

AUFGABE 2: Beweisen Sie, daß in $\ell^1(\mathbb{R})$ schwache und starke Konvergenz übereinstimmen.
Hinweis: Begründen Sie erst, daß es ausreicht, eine stark konvergente Teilfolge zu bestimmen.

AUFGABE 3: Sei X reflexiv und $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ schwache Cauchyfolge, d.h. $(\varphi(x_k))_{k \in \mathbb{N}}$ ist Cauchyfolge in $\mathbb{R}$ für alle $\varphi \in X'$. Zeigen Sie, daß $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ schwach konvergiert.

AUFGABE 4: Eine beschränkte Folge $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ konvergiert genau dann schwach gegen $x \in X$, falls gilt:

$$\lim_{k \to \infty} \varphi(x_k) = \varphi(x) \text{ für alle } \varphi \in D,$$

mit einer dichten Teilmenge $D \subset X'$.

AUFGABE 5: Untersuchen Sie die Folge $u_k(x) = \sin(kx)$ auf punktweise sowie auf schwache Konvergenz in $L^2((-\pi, \pi))$.

Bearbeiten Sie bitte 4 der 5 Aufgaben. Vergessen Sie bitte nicht, Ihren Namen auf Ihre Lösungsblätter zu schreiben. Abgabetermin ist Montag, 13.12.1999.