MATHEMATISCHES INSTITUT DER
ALBERT-LUDWIGS-UNIVERSITÄT FREIBURG

Prof. Dr. E. Kuwert
T. Müller

13. Dezember 1999

Funktionalanalysis I
WS 1999/00
Übungsblatt 9

AUFGABE 1: Der Satz von Riesz (Vorlesung) besagt, daß die Abbildungen

$$\begin{aligned} J_q : L^q(\mu) &\to (L^p(\mu))' \\ (J_q v)(u) &= \int uv\,d\mu \end{aligned}$$

surjektiv und isometrisch sind für $1 < p, q < \infty$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.
(1) Zeigen Sie:

$$\begin{aligned} (J_q^{-1})' : L^q(\mu)' &\to (L^p(\mu))'' \\ \psi &\mapsto \psi \circ J_q^{-1} \end{aligned}$$

ist surjektiv.
(2) Sei

$$\begin{aligned} J : L^p(\mu) &\to (L^p(\mu))'' \\ (Ju)(\varphi) &= \varphi(u) \end{aligned}$$

die kanonische Einbettung. Zeigen Sie

$$J = (J_q^{-1})' \circ J_p.$$

Also ist $L^p(\mu)$ reflexiv.

AUFGABE 2: Falls in einem Banachraum X die Folge $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ schwach gegen x konvergiert, so konvergiert eine geeignete Folge von (endlichen) Konvexkombinationen stark gegen x.

AUFGABE 3: Sei $g \in L^\infty(\mathbb{R})$ periodisch: $g(x+a) = g(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie, daß die Folge $g_k(x) = g(kx)$ für $k \to \infty$ schwach in $L^p(I)$ (I Intervall) gegen die konstante Funktion $g_\infty(x) = \frac{1}{a}\int_0^a g(\xi)d\xi$ konvergiert.

AUFGABE 4: Sei $\varphi \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Zeigen Sie, daß die Diracfolge $\varphi_\epsilon(x) = \epsilon^{-n}\varphi(\frac{x}{\epsilon})$ mit $\epsilon \to 0$ schwach$*$ in $C_c^0(\mathbb{R}^n)'$ gegen ein Vielfaches des Diracmaßes konvergiert.

AUFGABE 5: In der Quantenmechanik werden Meßgrößen (Observablen) als lineare Operatoren A mit $A = A^*$ in einem Hilbertraum H aufgefaßt. Die Elemente $\Psi \in H$ mit $\|\Psi\| = 1$ repräsentieren verschiedene Zustände des Teilchens, und man setzt

$$\begin{aligned} \langle A \rangle &= \langle A\Psi, \Psi \rangle \quad \text{(Erwartungswert)} \\ \Delta A &= \langle (A - \langle A \rangle id)^2 \Psi, \Psi \rangle^{1/2} \quad \text{(Unschärfe)}. \end{aligned}$$

Zeigen Sie $(\Delta A) \cdot (\Delta B) \geq \frac{1}{2} |\langle [A, B] \rangle|$, wobei $[A, B] = AB - BA$.

Bearbeiten Sie bitte 4 der 5 Aufgaben. Vergessen Sie bitte nicht, Ihren Namen auf Ihre Lösungsblätter zu schreiben. Abgabetermin ist Montag, 20.12.1999.