Differentialgleichungen

Ernst Kuwert

Fortbildung für Lehrkräfte

Mathematisches Forschungsinstitut Oberwolfach

November 2014

Draft version from 6. Oktober 2015.

Inhaltsverzeichnis

Vorwort

Im November 2014 fand am Mathematischen Forschungsinstitut Oberwolfach (MFO) eine Fortbildungswoche für Lehrer/innen statt. Das Thema Differentialgleichungen war vom Institut vorgeschlagen worden. Die Dozenten kamen von der Universität Freiburg. Als Vorkenntisse wurden nur Grundkenntnisse in Analysis und Linearer Algebra vorausgesetzt. Das Ziel war, exemplarisch Einblicke in verschiedene Gleichungen zu geben bis hin zu modernen analytischen Methoden. In Ergänzung wurden durch Tobias Malkmus und Martin Nolte (beide Abteilung für Angewandte Mathematik) einige numerische Simulationen vorgeführt und erklärt. Dies war wichtig, um ein Gesamtbild des Themas zu erlangen, ich bedanke mich für die wertvollen Beiträge. Ebenso bedanke ich bei Gerhard Huisken für die Einladung als Referent. Besonderer Dank gilt schließlich den Teilnehmern, ohne deren großes Engagement der Erfolg des Seminars nicht möglich gewesen wäre.

1

Gewöhnliche Differentialgleichungen

Mit Differentialgleichungen werden diverse Objekte und Prozesse aus Geometrie, Physik, Chemie, Biologie, Technik, Ökonomie und anderen Bereichen beschrieben. Ziel und Aufgabe der Analysis ist, beobachtete Phänomene mathematisch zu erklären und vorherzusagen. Die Wechselwirkung zwischen Beobachtung und Mathematik bezeichnet man als mathematische Modellierung.

Jedes der Modelle hat spezifische Eigenschaften, demzufolge ist die Theorie der Differentialgleichungen enorm vielschichtig und umfangreich. Allein im Springer-Verlag gibt es etwa 2.500 Bücher zum Thema; das Seminar kann klarerweise nur examplarische Einblicke geben. In diesem ersten Kapitel behandeln wir gewöhnliche Differentialgleichungen, das heißt die gesuchte Funktion hängt nur von einer Variablen x in einem Intervall I ab. Wir bezeichnen mit $C^k(I)$ die Funktionen, deren Ableitungen bis zur Ordnung k existieren und stetig sind. Allerdings nehmen wir oft einfach an, dass die Funktionen so regulär sind wie nötig, ohne das genau zu spezifizieren.

1.1 Newtonsche Mechanik

Die Newtonschen Bewegungsgleichungen sind historisch das erste Modell, das Differentialgleichungen verwendet. Dabei wird die Bewegung eines Massenpunkts durch eine Kurve $u : [0,T] \to U \subset \mathbb{R}^3$, $u = u(t)$, beschrieben. Unter dem Einfluss eines Kraftfelds $f : U \to \mathbb{R}^3$, $f = f(x)$, lauten die Bewegungsgleichungen

$$u''(t) = f(u(t)) \quad \text{für alle } t \in [0,T]. \tag{1.1}$$

Wir haben ohne Einschränkung angenommen, dass der Punkt Masse $m = 1$ hat. Eine Grundforderung an die Modellierung ist die Vorhersagbarkeit, insbesondere sollte es zu einem gegebenen Kraftfeld $f(x)$ eine und nur eine Lösung $u(t)$ geben, wenn die Position $u(0)$ und die Geschwindigkeit $u'(0)$ vorgegeben sind. Ist $u(t)$ eine Lösung der Bewegungsgleichungen, so gilt mit $v(t) = u'(t)$

$$(u,v)' = (v, f(u)) = F(u,v) \quad \text{wobei } F(x,y) = (y, f(x)).$$

Sind umgekehrt u, v Lösungen des Systems mit F, so folgt $u'' = v' = f(u)$. Die Gleichung zweiter Ordnung kann also äquivalent als System erster Ordnung formuliert werden; man spricht von Reduktion der Ordnung. Es reicht, Anfangswertprobleme erster Ordnung zu untersuchen.

Sei allgemein $F : U \to \mathbb{R}^m$ mit U offen im $\mathbb{R}^m$. Eine Funktion bzw. Kurve $u : I = (a,b) \to \mathbb{R}^m$ heißt Lösung der Differentialgleichung $u' = F(u)$, falls

$$u'(t) = F(u(t)) \text{ für alle } t \in (a,b) \qquad (\text{insbesondere } u(t) \in U \text{ für alle } t). \tag{1.2}$$

Man kann sich $u(t)$ als Bahn eines Teilchens vorstellen, das durch Vorgabe seiner Geschwindigkeit im Punkt $u(t)$ gesteuert wird. Ist zusätzlich der Anfangspunkt vorgegeben, also

$$u(t_0) = x_0 \qquad \text{wobei } t_0 \in (a,b),\, x_0 \in U, \tag{1.3}$$

so spricht man von einem Anfangswertproblem.

Satz 1.1 (Eindeutigkeit). *Ist F stetig differenzierbar, so hat das Anfangswertproblem (1.2), (1.3) höchstens eine C^1-Lösung auf I.*

Satz 1.2 (Kurzzeitexistenz). *Ist F stetig differenzierbar, so existiert eine C^1-Lösung des Anfangswertproblems (1.2), (1.3) auf einem hinreichend kleinen Intervall (t_1, t_2), das t_0 enthält.*

Der Existenzbeweis (Stichwort: Picard-Lindelöf) dürfte bekannt sein. Offen bleibt die Frage nach der Größe des Lösungsintervalls. Dass die Lösung eventuell nicht auf dem ganzen Intervall I existiert, ist ja zu erwarten: sie könnte vorzeitig auf den Rand des Gebiets treffen. Ein geworfener Stein trifft ja auch irgendwann mal auf den Boden. Ist das die einzige mögliche Komplikation?

Wenn der Grenzwert $x_2 = \lim_{t \nearrow t_2} u(t)$ existiert und in U liegt, dann gibt es auf einem Intervall $(t_2 - \tau, t_2 + \tau)$ eine Lösung $\tilde{u}$ mit Anfangswert $\tilde{u}(t_2) = x_2$. Wegen Eindeutigkeit stimmen $u(t)$ und $\tilde{u}(t)$ auf $(t_2 - \tau, t_2)$ überein; durch Zusammensetzen bekommen wir also eine Lösung des ursprünglichen Anfangswertproblems auf dem nach rechts erweiterten Intervall $(t_1, t_2 + \tau)$. Durch maximales Fortsetzen ergibt sich eine Lösung $u : (t_-, t_+) \to \mathbb{R}^m$, die weder nach rechts noch nach links fortgesetzt werden kann.

Satz 1.3 (Lifespan). *Sei $u : (t_-, t_+) \to \mathbb{R}^m$ die maximale Lösung des Anfangswertproblems (1.2), (1.3). Ist dann $t_+ < b$ (bzw. $t_- > a$), so verlässt die Lösungskurve $u(t)$ für $t \nearrow t_+$ (bzw. $t \searrow t_-$) jede kompakte Teilmenge von U.*

Proof. Sei $K \subset U$ kompakt, also abgeschlossen und beschränkt. Da $F(x)$ stetig, ist $|F(x)| \leq C = C(K) < \infty$ für alle $x \in K$. Angenommen es gibt ein $\tau < t_+$ mit $u(t) \in K$ für alle $t \in (\tau, t_+)$. Dann folgt

$$|u(t_1) - u(t_2)| = \Big| \int_{t_1}^{t_2} F(u(t))\, dt \Big| \leq C\, |t_1 - t_2| \qquad \text{für alle } t_{1,2} \in [\tau, t_+).$$

Dies bedeutet, dass der Grenzwert $x = \lim_{t \nearrow t_+} u(t)$ existiert und in K liegt, da K abgeschlossen ist. Wie oben erklärt, kann die Lösung dann nach rechts fortgesetzt werden, Widerspruch. Also muss jedenfalls die Lösung K immer wieder verlassen. Wir zeigen nun, dass sie K sogar ein für allemal verlässt. Betrachte die Parallelmenge

$$K_\delta = \{x \in \mathbb{R}^m : \operatorname{dist}(x, K) \leq \delta\}.$$

Für $\delta > 0$ klein ist K_δ kompakte Teilmenge von U, also muss $u(t)$ auch K_δ immer wieder verlassen. Wäre die Behauptung falsch, so gibt es t_1 mit $u(t_1) \in K$, dann $t_2 > t_1$ mit $u(t_2) \in U \backslash K_\delta$, und wieder $t_3 > t_2$ mit $u(t_3) \in K$, und so weiter. Für dieses Hin und Her braucht die Lösung aber unendlich viel Zeit: der Streifen $K_\delta \backslash K$ hat Breite $\delta > 0$, und dort hat $u(t)$ höchstens Geschwindigkeit $C_\delta = C(K_\delta)$, braucht also mindestens die Zeit $\delta / C_\delta > 0$ für eine Durchquerung. Wegen $t_+ < \infty$ liefert das einen Widerspruch. □

1.2 Eindimensionale Variationsprobleme

In der Variationsrechnung geht es um Funktionale

$$\mathcal{F} : \mathcal{C} \to \mathbb{R},\ \mathcal{F}(u) = \int_I f(x, u(x), u'(x))\, dx. \tag{1.4}$$

Dabei ist $\mathcal{C}$ eine gegebene Klasse von Abbildungen $u : I \to \mathbb{R}^m$ auf dem Intervall $I = [a, b]$. Der Integrand definiert das Funktional, er ist eine gegebene Funktion

$$f : I \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R},\ f = f(x, z, v).$$

Hat eine reelle Funktion in einem Punkt ein lokales Minimum, und existiert dort die Ableitung, so muss diese Null sein. Wir wollen das verwenden, um analog zu zeigen: wird ein Funktional $\mathcal{F}$ durch eine Funktion u minimiert, so erfüllt diese eine Differentialgleichung, die Euler-Lagrange Gleichung. Wir betrachten dazu eine Schar (andere Bezeichnung: Variation) von Funktionen, die von einem Parameter $t \in (-t_0, t_0)$ abhängen:

$$u : I \times (-t_0, t_0) \to \mathbb{R}^m,\ (x, t) \mapsto u(x, t).$$

Es ist anschaulich, den t-Parameter als Zeit aufzufassen, das heißt $t \mapsto u(\cdot, t)$ ist Bewegung oder Evolution einer Kurve im Raum. Zur Zeit $t = 0$ hat die Bewegung die Geschwindigkeit

$$\phi : I \to \mathbb{R}^m,\ \phi(x) = \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0).$$

Werten wir das Funktional auf den Kurven $u(\cdot,t)$ aus, so ergibt sich die reellwertige Funktion

$$(-t_0,t_0) \to \mathbb{R},\, t \mapsto \mathcal{F}(u(\cdot,t)) = \int_I f(x,u(x,t),u'(x,t))\,dx \qquad \text{mit } {}' = \frac{\partial}{\partial x}.$$

Wir berechnen die Ableitung dieser Funktion an der Stelle $t=0$ durch Differentiation unter dem Integral*

$$\frac{d}{dt}\mathcal{F}(u(\cdot,t))|_{t=0} = \int_I \Big(\frac{\partial f}{\partial z_i}(x,u_0,u_0')\phi_i + \frac{\partial f}{\partial v_i}(x,u_0,u_0')\,\phi_i'\Big)\,dx. \tag{1.5}$$

Hier ist natürlich $u_0 = u(\cdot,0)$ und $\phi = \phi(x)$. Die rechte Seite bezeichnet man als erste Variation von $\mathcal{F}$ an der Stelle u_0 in Richtung ϕ, Notation: $\delta\mathcal{F}(u,\phi)$. Integrieren wir den hinterem Term partiell, so folgt weiter

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\mathcal{F}(u(\cdot,t))|_{t=0} \quad &= \quad \int_I \Big(-\frac{d}{dx}\frac{\partial f}{\partial v_i}(x,u_0,u_0') + \frac{\partial f}{\partial z_i}(x,u_0,u_0')\Big)\phi_i\,dx \\ &\quad + \Big[\frac{\partial f}{\partial v_i}(x,u_0,u_0')\,\phi_i\Big]_{x=a}^{x=b}.\end{aligned} \tag{1.6}$$

Wir brauchen nun eine technische Hilfsaussage.

Lemma 1.1 (Fundamentallemma). *Ist $g: I \to \mathbb{R}^m$ stetig und gilt*

$$\int_I \langle g,\phi\rangle\,dx = 0 \qquad \textit{für alle } \phi \in C_c^\infty(I,\mathbb{R}^m), \tag{1.7}$$

so ist g identisch Null.

Proof. $C_c^\infty(I,\mathbb{R}^m)$ bezeichnet die Menge aller glatten Funktionen, die in der Nähe der Randpunkte von I gleich Null sind. Wäre in einem Punkt $x_0 \in (a,b)$ eine Komponente von g ungleich Null, etwa $g_k(x_0) = \varepsilon > 0$, so folgt

$$g_k \geq \frac{\varepsilon}{2} \text{ auf einem Intervall } [x_0-\delta, x_0+\delta] \subset I.$$

Es gibt nun eine glatte Funktion $\varphi \geq 0$, die außerhalb von $[x_0-\delta, x_0+\delta]$ verschwindet, die aber nicht die Nullfunktion ist. Wählen wir $\phi = \varphi\, e_k$, so folgt

$$0 = \int_I g_i\phi_i\,dx = \int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} g_k\varphi\,dx \geq \frac{\varepsilon}{2}\underbrace{\int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta}\varphi(x)\,dx}_{>0} > 0.$$

□

*Einsteinkonvention: über doppelt auftretende Indizes ist zu summieren

Wenn Sie der Beweis nicht überzeugt, hier die Begründung meines Physikprofessors im Studium: g steht auf alle Vektoren senkrecht, muss also der Nullvektor sein. Und das ist gar nicht falsch.

Satz 1.4. *Minimiert $u : I \to \mathbb{R}^m$ das Funktional $\mathcal{F}$ bei festen Randwerten, so löst u die Euler-Lagrange Gleichungen*

$$L_f(u)_i = -\frac{d}{dx}\frac{\partial f}{\partial v_i}(x,u,u') + \frac{\partial f}{\partial z_i}(x,u,u') = 0 \quad \textit{für } i = 1,\ldots,n. \tag{1.8}$$

Proof. Sei $\phi \in C_c^\infty(I, \mathbb{R}^m)$ beliebig. Dann gilt

$$\mathcal{F}(u) \leq \mathcal{F}(u + t\phi) \text{ für alle } t \in (-t_0, t_0),$$

also nach Gleichung (1.6)

$$0 = \frac{d}{dt}\mathcal{F}(u + t\phi)|_{t=0} = \int_I \langle L_f(u), \phi\rangle \, dx.$$

Mit Lemma 1.1 folgt $L_f(u) = 0$. □

Als Beispiel betrachten wir nochmal die klassische Mechanik. Wir nehmen an, dass das Kraftfeld $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ konservativ ist, das heißt es gibt eine Potentialfunktion $V : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = -\nabla V(x)$. Als Funktional betrachten wir mit Euler das Wirkungsintegral

$$\mathcal{F}(u) = \int_I \Big(\frac{1}{2}|u'|^2 - V(u)\Big)\, dt. \tag{1.9}$$

Hier ist $' = \frac{d}{dt}$, der Integrand ist also die Differenz der kinetischen und der potentiellen Energie:

$$f(t,x,v) = \frac{1}{2}|v|^2 - V(x).$$

Die Euler-Lagrange-Gleichungen des Wirkungsintegrals lauten

$$0 = L_f(u)_i = -\frac{d}{dt}u_i' - \frac{\partial V}{\partial x_i}(u) = -u_i'' + f_i(u).$$

Das ist aber genau die Bewegungsgleichung $u'' = f(u)$ (Hamiltonsches Prinzip der stationären Wirkung).

1.3 Das Längenfunktional

Das älteste Variationsproblem überhaupt ist womöglich die Frage nach der kürzesten Verbindung zweier Punkte $p, q \in \mathbb{R}^m$. Die Länge einer Kurve $\gamma : I =$

$[a,b] \to \mathbb{R}^m$ ist bekanntlich

$$L(\gamma) = \int_a^b |\gamma'(x)|\,dx. \tag{1.10}$$

Wir wollen die Euler-Lagrange Gleichung des Längenfunktionals ausrechnen. Neben der Differenzierbarkeit brauchen wir dazu, dass die Kurve γ regulär ist, das heißt $\gamma'(x) \neq 0$ für alle $x \in [a,b]$.

Satz 1.5 (Erste Variation der Bogenlänge). *Sei $c : I \times (-t_0, t_0) \to \mathbb{R}^m$ eine Kurvenschar und $\gamma = c(\cdot, 0)$ regulär. Dann gilt*

$$\frac{d}{dt} L(c(\cdot,t))|_{t=0} = -\int_I \langle \vec{\varkappa}, \phi \rangle\,ds + \big[\langle \vec{\tau}(x), \phi(x) \big]_{x=a}^{x=b} \quad \text{für } \phi = \frac{\partial c}{\partial t}(\cdot, 0) \tag{1.11}$$

Dabei sind $\vec{\tau}$, $\vec{\varkappa}$ Einheitstangente und Krümmungsvektor von γ, und $ds = |\gamma'(x)|\,dx$ ist das Bogenlängenelement.

Proof. Der Integrand ist $f(x,z,v) = |v|$, also $\frac{\partial f}{\partial v_i} = \frac{v_i}{|v|}$. Mit (1.6) folgt

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} L(c(\cdot,t))|_{t=0} &= -\int_I \Big(\frac{d}{dx} \frac{\gamma_i'}{|\gamma'|}\Big)\,\phi_i\,dx + \Big[\frac{\gamma_i'}{|\gamma'|}\,\phi_i\Big]_{x=a}^{x=b} \\ &= -\int_I \Big\langle \frac{1}{|\gamma'|} \frac{d}{dx} \frac{\gamma'}{|\gamma'|}, \phi \Big\rangle\,ds + \Big[\Big\langle \frac{\gamma'}{|\gamma'|}\,\phi \Big\rangle\Big]_{x=a}^{x=b}. \end{aligned}$$

Im hinteren Term ist $\frac{\gamma'}{|\gamma'|} = \vec{\tau}$ wie behauptet. Wir müssen zeigen:

$$\frac{1}{|\gamma'|}\Big(\frac{\gamma'}{|\gamma'|}\Big)' = \vec{\varkappa} \quad \text{(der Krümmungsvektor).} \tag{1.12}$$

Ist $|\gamma'| \equiv 1$, sprich Bogenlängenparametrisierung, so gilt nach Definition $\vec{\varkappa} = \gamma''$, also ist (1.12) korrekt. Für beliebige Kurven prüft man, dass dass die Formel in (1.12) unter Umparametrisierungen invariant ist. □

Der Vektor $\vec{\varkappa}$ steht stets senkrecht auf den Tangentenvektor $\vec{\tau}$, denn

$$\langle \vec{\varkappa}, \vec{\tau} \rangle = \frac{1}{|\gamma'|} \langle \vec{\tau}', \vec{\tau} \rangle = \frac{1}{2|\gamma'|} \langle \vec{\tau}, \vec{\tau} \rangle' = 0. \tag{1.13}$$

Minimiert γ die Bogenlänge unter allen Verbindungskurven von p nach q, so folgt analog zu Satz 1.4 die notwendige Bedingung $\vec{\varkappa} \equiv 0$. Man kann sich überlegen, dass γ dann eine Strecke parametrisiert, wie es sein sollte.

1.4 Variationsprobleme mit Nebenbedingungen

Wir betrachten als erstes globale Nebenbedingungen.

Satz 1.6 (Variationsproblem mit Nebenbedingung). *Betrachte*

$$\mathcal{F}(u) = \int_I f(x, u(x), u'(x))\, dx \quad \textit{und} \quad \mathcal{G}(u) = \int_I g(x, u(x), u'(x))\, dx.$$

Sei $u \in C^2(I, \mathbb{R}^m)$ Minimum von $\mathcal{F}$ bei festen Randwerten unter der Nebenbedingung $\mathcal{G} = c$. Gilt dann

$$\delta\mathcal{G}(u, \psi) \neq 0 \quad \textit{für ein } \psi \in C_c^\infty(I, \mathbb{R}^n),$$

so folgt für alle $\phi \in C_c^\infty(I, \mathbb{R}^m)$

$$\delta(\mathcal{F} - \lambda\mathcal{G})(u, \phi) = 0 \quad \textit{mit } \lambda = \frac{\delta\mathcal{F}(u, \psi)}{\delta\mathcal{G}(u, \psi)}.$$

Also erfüllt u die Differentialgleichung $L_f(u) - \lambda L_g(u) = 0$.

Proof. Für $\phi \in C_c^\infty(I, \mathbb{R}^m)$ sei $G(s,t) = \mathcal{G}(u + s\phi + t\psi)$. Es gilt

$$G(0,0) = \mathcal{G}(u) = c \quad \text{und} \quad \frac{\partial G}{\partial t}(0,0) = \delta\mathcal{G}(u, \psi) \neq 0.$$

Nach dem Satz über implizite Funktionen gilt lokal

$$G(s,t) = c \quad \Leftrightarrow \quad t = \tau(s) \quad (\text{insbesondere } \tau(0) = 0).$$

Wir berechnen

$$0 = \frac{d}{ds} G(s, \tau(s))|_{s=0} = \frac{d}{ds}\mathcal{G}(u + s\phi + \tau(s)\psi)|_{s=0} = \delta\mathcal{G}(u, \phi) + \tau'(0)\, \delta\mathcal{G}(u, \psi).$$

Aus der Minimumeigenschaft folgt

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{d}{ds}\mathcal{F}(u + s\phi + \tau(s)\psi)|_{s=0} \\ &= \delta\mathcal{F}(u, \phi + \tau'(0)\psi) \\ &= \delta\mathcal{F}(u, \phi) - \frac{\delta\mathcal{F}(u, \psi)}{\delta\mathcal{G}(u, \psi)}\delta\mathcal{G}(u, \phi) \\ &= \delta\big(\mathcal{F} - \lambda\mathcal{G}\big)(u, \phi). \end{aligned}$$

□

Als Beispiel betrachten wir für $\gamma : I = [a, b] \to \mathbb{R}^2$ die Funktionale

$$\mathcal{F}(\gamma) = \int_I |\gamma'|\, dx \quad \text{und} \quad \mathcal{G}(\gamma) = \frac{1}{2}\int_I \langle J\gamma, \gamma' \rangle\, dx.$$

Hier bezeichnet $J : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ die Drehung um 90° im mathematisch positiven Sinn, also $J(x, y) = (-y, x)$. Zur Erklärung: es ist $\langle Ja, b \rangle = \det(a, b)$ der

Flächeninhalt des Dreiecks mit Ecken $0, a, b$. Für $a = \gamma(x)$ und $b = \gamma(x+\Delta x) \approx \gamma(x) + \gamma'(x)\Delta x$ ergibt sich

$$\Delta A \approx \frac{1}{2}\big\langle J\gamma(x), \gamma(x) + \gamma'(x)\Delta x\big\rangle = \frac{1}{2}\big\langle J\gamma(x), \gamma'(x)\big\rangle\, \Delta x.$$

$\mathcal{G}(\gamma)$ gibt also den Flächeninhalt an, der vom Ortsvektor $\gamma(t)$ überstrichen wird; das Vorzeichen hängt von der Orientierung von γ, γ' ab.

Sei nun $\mathcal{C}$ die Menge aller Kurven $\gamma : I = [a,b] \to \mathbb{R}^2$ mit Endpunkten $\gamma(a), \gamma(b)$ auf der x-Achse. Ist $\phi \in C^\infty(I, \mathbb{R}^2)$ mit

$$\langle \phi(x), e_2\rangle = 0 \quad \text{für } x = a, b, \tag{1.14}$$

so ist $\gamma + t\phi$ ebenfalls in $\mathcal{C}$. Wir berechnen

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\mathcal{G}(\gamma + t\phi)|_{t=0} &= \frac{1}{2}\int_I \langle J\phi, \gamma'\rangle\, dx + \frac{1}{2}\int_I \langle J\gamma, \phi'\rangle\, dx \\ &= -\int_I \langle J\gamma', \phi\rangle\, dx + \frac{1}{2}\Big[\langle J\gamma, \phi\rangle\Big]_{x=a}^{x=b}. \end{aligned}$$

Wegen der Randbedingungen, siehe (1.14), verschwindet der Randterm. Wie in Satz 1.5 sei $ds = |\gamma'|\, dx$, $\tau = \frac{\gamma'}{|\gamma'|}$ und $\nu = J\tau$ die Einheitsnormale. Dann gilt

$$\frac{d}{dt}\mathcal{G}(\gamma + t\phi)|_{t=0} = -\int_I \langle \nu, \phi\rangle\, ds. \tag{1.15}$$

Sei nun γ Kürzeste unter allen Kurven in $\mathcal{C}$ mit der Nebenbedingung $\mathcal{G}(\gamma) = A > 0$. Wir haben

$$\frac{d}{dt}\mathcal{G}(t\gamma)|_{t=1} = \frac{d}{dt}\big(t^2\mathcal{G}(\gamma)\big)|_{t=1} = 2A > 0.$$

Wir haben analog mit $L = \mathcal{F}(\gamma)$

$$\frac{d}{dt}\mathcal{F}(t\gamma)|_{t=1} = \frac{d}{dt}\big(t\mathcal{F}(\gamma)\big)|_{t=1} = L.$$

Wir können nun Satz 1.6 anwenden und erhalten für alle ϕ mit (1.14)

$$\begin{aligned} 0 &= \delta\big(\mathcal{F} - \lambda\mathcal{G}\big)(\gamma, \phi) \quad \text{mit } \lambda = \frac{L}{2A} \\ &= -\int_I \big\langle \vec{\varkappa} - \lambda\nu, \phi\big\rangle\, ds + \Big[\langle \vec{\tau}, \phi\rangle\Big]_{x=a}^{x=b}. \end{aligned}$$

Wählen wir $\phi \in C_c^\infty(I, \mathbb{R}^2)$ so folgt $\vec{\varkappa} = \lambda\nu$. Somit hat γ konstante Krümmung und beschreibt einen Kreisbogen mit Radius $2A/L$. In einem zweiten Schritt können wir ϕ wählen mit $\phi(a) = e_1$, $\phi(b) = 0$, oder umgekehrt. Aus dem Verschwinden des Randterms folgt

$$\langle \vec{\tau}(x), e_1 \rangle = 0 \quad \text{für } x = a, b.$$

Also steht γ am Rand senkrecht auf die x-Achse. Wir haben hier Variationen ϕ benutzt, die nicht am Rand verschwinden. Der Satz 1.6 gilt aber entsprechend.

Eine Lösung unseres Problems ist also ein Halbkreis, der mit der x-Achse den Flächeninhalt $A > 0$ einschließt. Nach Vergil wurde der phönizischen Prinzessin Dido vom numidischen König Jarbas Land versprochen, aber nur so viel, wie sie mit einer Ochsenhaut umspannen könne. Vielleicht schnitt sie die Haut in Streifen und machte daraus ein Band, das als Halbkreis zusammen mit dem Meeresufer ein möglichst großes Gebiet begrenzte: das spätere Karthago. Wir müssen bemerken, dass sich aus unserm Ansatz nicht nur der Halbkreis als Lösung ergibt, sondern auch der Vollkreis sowie Mehrfachumrundungen. Diese sind aber nicht optimal.

Als zweites Variationsproblem wollen wir Geodätische auf einer Fläche $M \subset \mathbb{R}^3$ betrachten. Der Einfachheit halber sei M als Niveaumenge einer glatten Funktion gegeben:

$$M = \{p \in \mathbb{R}^3 : g(p) = 0\} \quad \text{wobei } \nabla g(p) \neq 0 \text{ für alle } p \in M.$$

Die Einheitsnormale von M ist $N(p) = \nabla g(p)/|\nabla g(p)|$. Als Funktional nehmen wir die Energie

$$E(\gamma) = \frac{1}{2} \int_I |\gamma'(x)|^2 \, dx \quad \text{mit } I = [a, b]. \tag{1.16}$$

Sei γ ein minimierende Kurve zu Randwerten $p, q \in M$. Das Problem bei der Bestimmung der Euler-Lagrange Gleichung besteht hier darin, dass Variationen nicht notwendig in M liegen. Unser Ansatz: die Variation auf M zu projizieren. Sei $\pi : U \to M$ die Projektion auf den nächsten Punkt in M; diese Abbildung ist nahe bei M definiert. Wir berechnen die Ableitung von π im Punkt $p \in M$: ist $c : (-\delta, \delta) \to M$ Kurve mit $c(0) = p$ und $c'(0) = v \in T_pM$, so gilt

$$D\pi(p) \cdot v = (\underbrace{\pi \circ c}_{=c})'(0) = c'(0) = v.$$

Ist andererseits $c(t) = p + tN(p)$, so folgt

$$D\pi(p) \cdot N(p) = (\underbrace{\pi \circ c}_{=p})'(0) = 0.$$

Somit ist $D\pi(p) = P_p$ die Projektion auf den Tangentialraum in p. Für $\phi \in C_c^\infty(I, \mathbb{R}^3)$ haben wir nun die zulässige Variation

$$c : I \times (-t_0, t_0) \to M,\ c(x,t) = \pi\big(\gamma(x) + t\phi(x)\big).$$

Wir berechnen

$$\frac{\partial}{\partial t} c(x,t)|_{t=0} = D\pi(\gamma(x))\phi(x) = P_{\gamma(x)}\phi(x).$$

Also ergibt sich mit (1.6)

$$\frac{d}{dt} E\big(c(\cdot,t)\big)|_{t=0} = -\int_I \langle \gamma''(x), P_{\gamma(x)}\phi(x)\rangle\, dx = -\int_I \langle P_{\gamma(x)}\gamma''(x), \phi(x)\rangle\, dx.$$

Mit dem Fundamentallemma folgt die Euler-Lagrange Gleichung

$$P_\gamma \gamma'' = 0 \quad \text{auf } I. \tag{1.17}$$

Mit andern Worten haben wir $\gamma''(x) = \lambda(x) N(\gamma(x))$ für eine gewisse Funktion $\lambda : I \to \mathbb{R}$. Diese können wir noch berechnen:

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{d^2}{dx^2} g(\gamma(x)) \\ &= D^2 g(\gamma(x))(\gamma'(x), \gamma'(x)) + \langle \nabla g(\gamma(x)), \gamma''(x)\rangle \\ &= D^2 g(\gamma(x))(\gamma'(x), \gamma'(x)) + \lambda(x)|\nabla g(x)|. \end{aligned}$$

Wir erhalten die Differentialgleichung

$$\gamma'' + \frac{D^2 g(\gamma)(\gamma',\gamma')}{|\nabla g(\gamma)|} N(\gamma) = 0. \tag{1.18}$$

Es ist vielleicht geometrischer, Geodätische mit dem Längenfunktional einzuführen. Man kommt aber zu gleichen Ergebnissen, was mit der Möglichkeit zusammenhängt, Kurven nach der Bogenlänge zu parametrisieren. Für Geodätische ist automatisch $|\gamma'|$ konstant, denn es gilt

$$\frac{d}{dx}\frac{1}{2}|\gamma'|^2 = \langle \gamma', \gamma''\rangle = 0. \tag{1.19}$$

Nachlese. Wir haben gelernt, dass Minimierer eines Variationsproblems eine Differentialgleichung erfüllen, nämlich die Euler-Lagrange Gleichung. Dabei haben wir vorausgesetzt, dass Minimierer existieren und regulär sind, also mindestens zweimal stetig differenzierbar. Hilbert hat diese Fragen in seine berühmte Liste von offenen Problemen aufgenommen, die er im Jahr 1900 vorgestellt hat. Im eindimensionalen Fall hat Tonelli um 1910-1930 die Existenz von Minimierern und deren Regularität analysiert. Der mehrdimensionale Fall hat die Analysis des 20^{ten} Jahrhunderts wesentlich bestimmt.

Aufgabe 1 Überlegen Sie gemeinsam, wo und wie Ihnen Differentialgleichungen bereits begegnet sind.

Aufgabe 2 Betrachten Sie die Bewegung eines Massenpunkts in einem konservativen Kraftfeld, also $f(x) = -\nabla V(x)$.

(1) Zeigen Sie, dass die Energie $E(x,v) = \frac{1}{2}|v|^2 + V(x)$ längs der Bahnkurve konstant ist.

(2) Es gelte $V(x) \to \infty$ mit $|x| \to \infty$. Begründen Sie, dass die Bewegung für alle Zeiten existiert.

Aufgabe 3 Zeigen Sie, dass das Funktional

$$\mathcal{F}(u) = \int_0^1 \left((u'(x)^2 - 1)^2 + u(x)^2\right) dx$$

sein Infimum über C^1-Funktionen $u : (0,1) \to \mathbb{R}$ nicht annimmt. Beschreiben Sie das Verhalten von Minimalfolgen.

Literatur

[1] Giaquinta, M., Hildebrandt, S., *Calculus of Variations I*, Grundlehren der mathematischen Wissenschaften Bd. 310, Springer Verlag, Berlin Heidelberg 1996.

[2] Hildebrandt, S., Tromba, A., *Kugel, Kreis und Seifenblasen (Optimale Formen in Geometrie und Natur)*, Birkhäuser Verlag, Basel, Boston, Berlin 1996.

[3] Müller, S., *Microstructure in crystalline solids*, MPG Jahrbuch 1999 (vgl. Aufgabe 3).

[4] Sweers, G., *Gewöhnliche Differentialgleichungen*, Notizen zur Vorlesung 08/09, Universität zu Köln.

2

Partielle Differentialgleichungen

Eine partielle Differentialgleichung (PDE) der Ordnung k für eine gesuchte Funktion $u : \Omega \to \mathbb{R}^m$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, hat die allgemeine Form

$$F[D^k u(x), D^{k-1} u(x), \ldots, u(x), x] = 0,$$

wobei $D^k u$ den Vektor aller partiellen Ableitungen der Ordnung k bezeichnet. Jede solche Ableitung hat die Form

$$\partial^\alpha u = \partial_1^{\alpha_1} \ldots \partial_n^{\alpha_n} u \quad \text{ mit } |\alpha| = \alpha_1 + \ldots + \alpha_n = k.$$

Es gibt nur sehr wenige Aspekte, die in dieser Allgemeinheit von Interesse sind. Vielmehr, wie schon im ersten Kapitel betont, ergeben sich interessante Fragen im Zusammenhang mit der Modellierung von Problemen in Geometrie und Naturwissenschaften. In diesem Kapitel wollen wir einige Beispiele von PDE's herleiten. Die umfangreiche Theorie, die zu jeder der Gleichungen existiert, können wir hier nicht behandeln. Wir präsentieren aber jeweils ein oder zwei ausgewählte Sätze, die allein aus der Gleichung ohne explizite Kennntis von Lösungen folgen. Dieser Ansatz, Informationen direkt aus der Gleichung zu gewinnen, kennzeichnet die moderne PDE-Theorie.

2.1 Hilfsmittel

Die Herleitung aus einem Variationsprinzip spielt natürlich auch für mehrdimensionale Probleme eine grundlegende Rolle; hierfür brauchen wir eine mehrdimensionale Version des Fundamentallemmas. Im folgenden ist Ω eine offene, beschränkte Teilmenge des $\mathbb{R}^n$. Wir definieren den Raum $C_c^\infty(\Omega)$:

- alle Ableitungen $\partial^\alpha u$, $|\alpha| = 0, 1, \ldots$, existieren und sind stetig auf Ω.
- es ist $u(x) = 0$ in der Nähe des Randes von Ω.

Lemma 2.1 (Fundamentallemma). *Sei $g : \Omega \to \mathbb{R}^m$ stetig mit*

$$\int_\Omega \langle g, \phi \rangle \, dx = 0 \qquad \textit{für alle } \phi \in C_c^\infty(\Omega, \mathbb{R}^m).$$

Dann ist g identisch Null.

Beweis wie im Eindimensionalen. Wir brauchen weiter folgende Tatsache.

Lemma 2.2. *Für $\varphi \in C_c^1(\Omega)$ und $1 \leq i \leq n$ gilt*

$$\int_\Omega \partial_i \varphi \, dx = 0.$$

Proof. Ohne Einschränkung sei $i = n$. Wir setzen φ durch Null auf ganz $\mathbb{R}^n$ fort. Wir können dann über eine Box $[a_1, b_1] \times \ldots \times [a_n, b_n]$ integrieren, die Ω enthält. Mit Fubini und dem eindimensionalen Hauptsatz folgt

$$\begin{aligned}
\int_\Omega \partial_n \varphi \, dx &= \int_{[a_1,b_1]\times\ldots\times[a_n,b_n]} \partial_n \varphi \, dx \\
&= \int_{a_1}^{b_1} \cdots \underbrace{\int_{a_n}^{b_n} \frac{\partial \varphi}{\partial x_n}(x_1, \ldots, x_n) \, dx_n}_{=0} \ldots dx_1 \\
&= 0.
\end{aligned}$$

□

Zur Herleitung der Euler-Lagrange Gleichung sind diese Hilfsaussagen ausreichend. Bei der Begründung von Randbedingungen und in zahlreichen anderen Anwendungen brauchen wir aber den Satz von Gauß.

Satz 2.1. *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ mit glattem Rand, und $X : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}^n$ sei ein glattes Vektorfeld. Dann gilt*

$$\int_\Omega \operatorname{div} X \, dx = \int_{\partial\Omega} \langle X, \nu \rangle \, d\omega. \tag{2.1}$$

Dabei wird rechts bezüglich des Oberflächenmaßes integriert; das Vektorfeld $\nu : \partial\Omega \to \mathbb{R}^n$ ist die äußere Einheitsnormale.

Dieser Satz verallgemeinert den Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung. Im Fall einer Box $Q = [a_1, b_1] \times \ldots \times [a_n, b_n]$ gilt

$$
\begin{aligned}
\int_Q \partial_n X_n \, dx &= \int_{a_1}^{b_1} \ldots \int_{a_n}^{b_n} \partial_n X_n(x_1, \ldots, x_n) \, dx_n \ldots dx_1 \\
&= \int_{a_1}^{b_1} \ldots \int_{a_{n-1}}^{b_{n-1}} X_n(x_1, \ldots, x_{n-1}, b_n) \, dx_{n-1} \ldots dx_1 \\
&\quad - \int_{a_1}^{b_1} \ldots \int_{a_{n-1}}^{b_{n-1}} X_n(x_1, \ldots, x_{n-1}, a_n) \, dx_{n-1} \ldots dx_1 \\
&= \int_{\{x \in \partial Q : x_n = b_n\}} \langle X, \nu \rangle \, d\omega + \int_{\{x \in \partial Q : x_n = a_n\}} \langle X, \nu \rangle \, d\omega.
\end{aligned}
$$

Beachte $\nu = e_n$ auf der Seitenfläche $x_n = b_n$, während $\nu = -e_n$ auf $x_n = a_n$. Argumentieren wir analog bezüglich der x_i und summieren, so folgt der Satz von Gauß in diesem Spezialfall; das muss und sollte zur Motivation reichen.

2.2 Die Laplacegleichung

Das Dirchletintegral einer Funktion $u : \Omega \to \mathbb{R}$ lautet, mit $\partial_i = \frac{\partial}{\partial x_i}$,

$$
\mathcal{D}(u) = \frac{1}{2} \int_\Omega |\nabla u(x)|^2 \, dx \quad \text{wobei } |\nabla u|^2 = \sum_{i=1}^n (\partial_i u)^2. \tag{2.2}
$$

In der Elektrostatik ist die Energiedichte des elektrischen Feldes $E : \Omega \to \mathbb{R}^n$ gleich $\frac{1}{2}|E|^2$. Für E konservativ, also $E = -\nabla u$ mit einer Potentialfunktion u, führt das auf die Energie (2.2). Wir berechnen nun für $\phi \in C_c^\infty(\Omega)$ die erste Variation

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{d\varepsilon} \mathcal{D}(u + \varepsilon \phi)|_{\varepsilon = 0} &= \int_\Omega \langle \nabla u, \nabla \phi \rangle \, dx \\
&= \underbrace{\int_\Omega \sum_{i=1}^n \partial_i((\partial_i u)\phi) \, dx}_{=0} - \int_\Omega \Big(\sum_{i=1}^n \partial_i^2 u \Big) \phi \, dx \\
&= -\int_\Omega (\Delta u) \phi \, dx.
\end{aligned}
$$

Jetzt nehmen wir an, dass $u : \Omega \to \mathbb{R}$ das Dirichletintegral minimiert unter allen Funktionen mit denselben Randwerten. Dann ist die erste Variation Null und es folgt mit dem Fundamentallemma

$$\Delta u = \sum_{i=1}^{n} \partial_i^2 u = 0 \quad \text{auf } \Omega. \tag{2.3}$$

Dies ist die Laplace-Gleichung, ihre Lösungen heißen harmonische Funktionen. Für $n = 2$ besteht ein enger Bezug zur komplexen Analysis, den Sie wahrscheinlich kennen: eine Funktion $f = u + iv : \Omega \to \mathbb{C}$ ist nach Definition komplex differenzierbar, wenn sie die Cauchy-Riemann Gleichungen erfüllt:

$$u_x = v_y \quad \text{und} \quad u_y = -v_x.$$

Aus diesen Gleichungen folgt

$$u_{xx} + u_{yy} = (v_y)_x + (-v_x)_y = 0 \quad \text{sowie} \quad v_{xx} + v_{yy} = (-u_y)_x + (u_x)_y = 0,$$

Real- und Imaginärteil einer komplex differenzierbaren (holomorphen) Funktion sind harmonisch. Umgekehrt: ist $u : \Omega \to \mathbb{R}$ harmonisch und Ω einfach zusammenhängend, so gibt es eine harmonische Funktion $v : \Omega \to \mathbb{R}$ mit $f := u + iv$ komplex differenzierbar. v ist eindeutig bis auf eine additive Konstante.

Satz 2.2 (Mittelwerteigenschaft). *Sei $u : \Omega \to \mathbb{R}$ harmonisch. Dann gilt für jeden Ball $B_r(x_0) \subset \Omega$*

$$u(x_0) = \fint_{B_r(x_0)} u(x)\, dx.$$

Proof. Wir beginnen mit dem sphärischen Mittelwert. Um die r-Ableitung auszurechnen, substituieren wir $x = x_0 + ry$ mit $y \in \mathbb{S}^{n-1}$. Wir setzen $|\mathbb{S}^{n-1}| = \omega_{n-1}$.

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dr} \fint_{\mathbb{S}_r^{n-1}(x_0)} u(x)\, d\omega(x) &= \frac{d}{dr}\Big(\frac{1}{\omega_{n-1} r^{n-1}} \int_{\mathbb{S}^{n-1}} u(x_0 + ry)\, r^{n-1} d\omega(y)\Big) \\
&= \frac{1}{\omega_{n-1}} \int_{\mathbb{S}^{n-1}} \langle \nabla u(x_0 + ry), y \rangle\, d\omega(y) \\
&= \frac{1}{\omega_{n-1} r^{n-1}} \int_{\mathbb{S}_r^{n-1}(x_0)} \langle \nabla u(x), \frac{x - x_0}{r} \rangle d\omega(x) \\
&= \frac{1}{\omega_{n-1} r^{n-1}} \int_{B_r(x_0)} \Delta u\, dx \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Hier wurde der Satz von Gauß benutzt, beachte dass $\frac{x-x_0}{r}$ äußere Normale auf $\mathbb{S}_r^{n-1}(x_0)$ ist. Für $r \searrow 0$ konvergiert der Mittelwert gegen $u(x_0)$, also ist die

Formel für den sphärischen Mittelwert gezeigt. Berechne weiter

$$\begin{aligned}
\int_{B_r(x_0)} u(x)\,dx &= \int_0^r \int_{\mathbb{S}_\varrho^{n-1}(x_0)} u(x)\,d\omega(x)\,d\varrho \\
&= u(x_0) \int_0^r \omega_{n-1}\varrho^{n-1} d\varrho \\
&= u(x_0)\,\frac{1}{n}\omega_{n-1} r^n.
\end{aligned}$$

Mit $u(x) \equiv 1$ sieht man $|B_r(x_0)| = \frac{1}{n}\omega_{n-1} r^n$, also ist der Satz bewiesen. □

Satz 2.3 (Cauchy-Abschätzungen). *Zu $k \in \mathbb{N}$ gibt es eine Konstante $C_k < \infty$ mit folgender Eigenschaft: ist $u \in C^\infty(\Omega)$ harmonisch und $B_r(x_0) \subset \Omega$, so gilt*

$$|\partial^\alpha u(x_0)| \leq \frac{C_k}{r^k} \max_{B_r(x_0)} |u(x)| \quad \textit{für jede Ableitung der Ordnung } |\alpha| = k. \tag{2.4}$$

Proof. Wir zeigen die Aussage für $k = 1$, der Rest folgt durch Induktion. Da $\Delta \partial_j u = \partial_j \Delta u = 0$, liefert Satz 2.2

$$\begin{aligned}
|\partial_j u(x_0)| &= \Big| \fint_{B_r(x_0)} \partial_j u(x)\,dx \Big| \\
&= \frac{1}{\alpha_n r^n} \Big| \int_{B_r(x_0)} \operatorname{div}(u e_j)\,dx \Big| \\
&= \frac{1}{\alpha_n r^n} \Big| \int_{\partial B_r(x_0)} u(x) \langle e_j, \nu(x) \rangle\,d\omega(x) \Big| \\
&\leq \frac{n}{r} \max_{B_r(x_0)} |u(x)|.
\end{aligned}$$

□

In der Theorie partieller Differentialgleichungen sind *a priori Abschätzungen* ein zentrales Werkzeug, sie rufen bei den Experten leuchtende Augen hervor. Man kann die Abschätzung (2.4) als ersten Prototyp in dieser Richtung verstehen. Ohne eine explizite Lösung zu betrachten, werden allein aus der Gleichung höhere Ableitungen beschränkt. Die relevante Konstante ist universell, sprich hängt nicht von der Funktion ab. Diese Abschätzungen haben zahlreiche Anwendungen. Zum Beispiel kann aus Satz 2.3 mit einem einfachen Approximationsargument gefolgert werden, dass harmonische Funktionen automatisch unendlich oft differenzierbar sind. Eine bekannte andere Anwendung ist

Folgerung 2.1 (Liouville). *Ist $u : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ harmonisch und beschränkt, so ist u konstant.*

Proof. Für jedes $x \in \mathbb{R}^n$ folgt

$$|\partial_j u(x)| \leq \frac{n}{r} \max_{B_r(x)} |u| \leq \frac{C}{r} \to 0 \quad \text{mit } r \to \infty.$$

Die Ableitung von u ist Null, also u konstant. □

Ein Standardproblem der Elektrostatik ist die Bestimmung des elektrischen Feldes in einem Gebiet Ω, wenn das Potential am Rand vorgeschrieben ist. Im Fall, dass sich in Ω keine Ladungen befinden, erhalten wir das Randwertproblem

$$\Delta u = 0 \text{ in } \Omega, \quad u = \varphi \text{ auf } \partial\Omega. \tag{2.5}$$

Dies ist das Dirichletproblem für die Laplacegleichung.

2.3 Die Wärmeleitungsgleichung

Wir wollen eine mathematische Motivation der Wärmeleitungsgleichung geben, und beginnen mit einer Analogie. Die Funktion $f : U \to \mathbb{R}$ beschreibe die Höhe eines Gebirges auf der Landkarte $U \subset \mathbb{R}^2$. Die Steilheit an der Stelle $x \in U$ in Richtung des Einheitsvektors v ist die Richtungsableitung

$$\frac{d}{dt} f(x + tv)|_{t=0} = \langle \nabla f(x), v \rangle.$$

Der Vektor $-\nabla f(x)$ zeigt in Richtung des steilsten Abstiegs, denn nach Cauchy-Schwarz gilt für $|v| = 1$

$$\langle \nabla f(x), v \rangle \geq -|\nabla f(x)|, \text{ Gleichheit für } v = -\frac{\nabla f(x)}{|\nabla f(x)|}.$$

Der Gradientenfluss von f ist das Anfangswertproblem

$$\gamma'(t) = -\nabla f(\gamma(t)), \quad \gamma(0) = x_0.$$

Der Fluss geht immer in Richtung des steilsten Abstiegs, $f(\gamma(t))$ ist fallend:

$$\frac{d}{dt} f(\gamma(t)) = -|\nabla f(\gamma(t))|^2 \leq 0.$$

Die stationären Punkte des Flusses sind genau die kritischen Punkte von f. Die Wärmeleitungsgleichung ergibt sich nun als unendlichdimensionale Variante. Betrachte dazu das L^2-Skalarprodukt

$$\langle u, v \rangle_{L^2} = \int_\Omega uv \, dx.$$

Für Funktionen u, v mit $u = v = 0$ auf $\partial\Omega$ gilt

$$\frac{d}{dt}\mathcal{D}(u+tv)|_{t=0} = \int_\Omega \langle \nabla u, \nabla v\rangle\, dx = -\int_\Omega (\Delta u) v\, dx = -\langle \Delta u, v\rangle_{L^2}.$$

Salopp gesagt ist $-\Delta u$ der L^2-Gradient des Dirichletintegrals an der Stelle u, auf dem Raum der Funktionen mit Nullrandwerten. Der zugehörige Gradientenfluss, zusammen mit den Rand- und Anfangsbedingungen, ist

$$\begin{aligned} \partial_t u &= \Delta u \quad \text{in } \Omega \times (0,T),\\ u(x,t) &= 0 \quad \text{auf } \partial\Omega \times (0,T),\\ u(x,0) &= u_0(x) \quad \text{auf } \Omega. \end{aligned}$$

Das Dirichletintegral ist längs des Flusses fallend:

$$\frac{d}{dt}\mathcal{D}(u) = \int_\Omega \langle \nabla u, \nabla \partial_t u\rangle\, dx = \int_{\partial\Omega} \langle \nabla u, \nu\rangle \underbrace{\partial_t u}_{=0}\, d\omega - \int_\Omega |\Delta u|^2\, dx \leq 0.$$

2.4 Die Wellengleichung

Die Wellengleichung ist ein Modell für die Schwingung einer Saite, Membran oder eines elastischen Festkörpers nach den Gesetzen der Newtonschen Mechanik. Sie lautet

$$\partial_t^2 u - \Delta u = 0. \tag{2.6}$$

Dabei beschreibt $u = u(x,t)$ die zeit- und ortsabhängige Auslenkung von der Ruhelage. Die Gleichung kann aus dem Hamiltonschen Prinzip für folgendes Wirkungsintegral hergeleitet werden.

$$\mathcal{F}(u) = \frac{1}{2}\int_{t_1}^{t_2}\int_\Omega (|\partial_t u|^2 - |\nabla u|^2)\, dxdt. \tag{2.7}$$

Dabei bezeichnet ∇u die Ortsableitungen von u. Der erste Term im Integral ist die kinetische Energie, der zweite die mit der Auslenkung verbundene potentielle Energie. Der Ansatz beruht auf einer Approximation für kleine Auslenkungen, bei realen Auslenkungen muss das Modell angepasst werden. Der Nachweis, dass (2.6) die Euler-Lagrange Gleichung des Funktionals (2.7) ist, soll den Teilnehmern überlassen sein.

Wir betrachten nun das Anfangswertproblem auf $\Omega = \mathbb{R}^n$ mit gegebener Anfangslage $u_0(x)$ und Anfangsgeschwindigkeit $v_0(x)$:

$$u(x,0) = u_0(x) \quad \text{und} \quad \partial_t u(x,0) = v_0(x) \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R}^n. \tag{2.8}$$

Wir wollen zeigen, dass sich die Welle mit Geschwindigkeit Eins ausbreitet. Die Auslenkung $u(x_0,t_0)$, $t_0 > 0$, sollte also nur von den Anfangsdaten im Ball $B_{t_0}(x_0)$ abhängen. Um das zu zeigen, betrachten wir für $t \in [0,t_0]$ die Energie

$$E(t) = \frac{1}{2}\int_{B_{t_0-t}(x_0)} |Du|^2(x,t)\,dx = \frac{1}{2}\int_0^{t_0-t}\int_{\partial B_\varrho(x_0)} |Du|^2(x,t)\,d\omega(x)d\varrho.$$

Dabei ist $Du = (\nabla u, \partial_t u)$. Mit Differentiation folgt

$$\begin{aligned}
E'(t) &= \int_{B_{t_0-t}(x_0)} \langle \partial_t Du, Du\rangle\ dx - \frac{1}{2}\int_{\partial B_{t_0-t}(x_0)} |Du|^2\,d\omega(x)\\
&= \int_{B_{t_0-t}(x_0)} \partial_t^2 u\,\partial_t u\,dx + \int_{B_{t_0-t}(x_0)} \langle \nabla\partial_t u, \nabla u\rangle\,dx\\
&\quad -\frac{1}{2}\int_{\partial B_{t_0-t}(x_0)} |Du|^2\,d\omega(x).
\end{aligned}$$

Verwende nun $\langle \nabla\partial_t u, \nabla u\rangle = \operatorname{div}\big((\partial_t u)\nabla u\big) - \partial_t u\,\Delta u$. Wir erhalten

$$E'(t) = \int_{B_{t_0-t}(x_0)} \underbrace{\big(\partial_t^2 u - \Delta u\big)}_{=0}\,\partial_t u\,dx + \int_{\partial B_{t_0-t}(x_0)} \underbrace{\Big(\partial_t u\langle \nabla u, \nu\rangle - \frac{1}{2}(|\partial_t u|^2 + |\nabla u|^2)\Big)}_{\le 0}\,d\omega.$$

Im letzten Schritt schätzen wir mit Cauchy-Schwarz wie folgt ab:

$$|\partial_t u\langle \nabla u, \nu\rangle| \le |\partial_t u|\,|\nabla u| \le \frac{1}{2}\big(|\partial_t u|^2 + |\nabla u|^2\big).$$

Insgesamt gelangen wir zu

$$\frac{d}{dt}\int_{B_{t_0-t}(x_0)} |Du(x,t)|^2\,dx \le 0. \tag{2.9}$$

Ist $u_0, v_0 = 0$ in $B_{t_0}(x_0)$, so ist $Du(\cdot,t) = 0$ auf der Kugel $B_{t_0-t}(x_0)$ und insbesondere $u(x_0,t_0) = 0$. Durch Subtraktion sehen wir: haben zwei Lösungen dieselben Anfangswerte auf $B_{t_0}(x_0)$, so haben sie im Punkt (x_0,t_0) denselben Wert. Die Auslenkung $u(x_0,t_0)$ hängt also von den Anfangswerten außerhalb $B_{t_0}(x_0)$ nicht ab. Sind die Anfangsdaten gleich Null außerhalb einer Menge K_0, so sind $u(\cdot,t) = \partial_t u(\cdot,t) = 0$ außerhalb der Menge $K_t = \{x \in \mathbb{R}^n : \operatorname{dist}(x,K_0) \le t\}$. Dies bedeutet, dass sich die Welle höchstens mit Geschwindigkeit Eins ausbreitet.

2.5 Die Eulergleichungen

Ziel ist die Modellierung der Strömung eines Fluids in einem Gebiet Ω des $\mathbb{R}^n$ auf einem Zeitintervall $I = [0,T]$. Sei $t \mapsto \phi(x,t)$ die Bahnkurve eines Partikels, das zur Zeit $t = 0$ am Ort $x \in \Omega$ startet. Die Abbildung

$$\phi : \Omega \times I \to \Omega,\ (x,t) \mapsto \phi(x,t),$$

beschreibt den Strömungstransport. Sei $u(x,t)$ die Geschwindigkeit am *festen* Punkt $x \in \Omega$ zur Zeit $t \in [0,T]$. Die Bahnkurve $\gamma(t) = \phi(x,\cdot)$ eines Partikels ist dann Lösung des Anfangswertproblems

$$\gamma'(t) = u(\gamma(t),t), \quad \gamma(0) = x. \tag{2.10}$$

Bezeichne mit $\phi_t : \Omega \to \Omega$, $\phi_t(x) = \phi(x,t)$, die Transportabbildung von Zeit $t = 0$ nach Zeit $t \in [0,T]$. Wir behaupten, dass ϕ_t injektiv ist. Angenommen $\phi_t(x_1) = \phi_t(x_2)$. Die Kurven $s \mapsto \phi_s(x_i)$ lösen die Differentialgleichung in (2.10), und stimmen bei $s = t$ überein. Nach unserem Satz 1.1 sind die Kurven gleich, insbesondere $x_1 = \phi_0(x_1) = \phi_0(x_2) = x_2$ wie behauptet. * Wir wollen nun Erhaltungssätze formulieren, und brauchen dazu etwas Mathematik.

Lemma 2.3 (Ableitung der Determinante). *Sei $A(t) = \big(a_{ij}(t)\big) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mit $A(0) = E_n$ bzw. $a_{ij}(0) = \delta_{ij}$. Dann gilt die Formel*

$$(\det\, A)'(0) = \sum_{i=1}^{n} a'_{ii}(0) = \operatorname{spur} A'(0). \tag{2.11}$$

Proof. Nach Leibniz (Regel von Sarrus für $n = 3$) gilt

$$\det\, A = \sum_{\sigma\in S_n} \operatorname{sign}(\sigma)\, a_{1\sigma_1} \cdot \ldots \cdot a_{n\sigma_n}.$$

Dabei ist S_n die Menge aller Umordnungen von $1,\ldots,n$, wobei i auf σ_i abgebildet wird. Nach der Produktregel gilt

$$\big(a_{1\sigma_1} \cdot \ldots \cdot a_{n\sigma_n}\big)'(0) = \sum_{i=1}^{n} \delta_{1\sigma_1} \cdot \ldots \cdot a'_{i\sigma_i}(0) \cdot \ldots \cdot \delta_{n\sigma_n}.$$

Für $\sigma \neq \mathrm{id}$ ist $\sigma(i) \neq i$ für mindestens zwei $i \in \{1,\ldots,n\}$. Dann ist aber die Ableitung Null, weil jeder der Summanden $n-1$ Faktoren $\delta_{i\sigma_i}$ enthält. Es bleibt nur $\sigma = \mathrm{id}$ und

$$(\det\, A)'(0) = \sum_{i=1}^{n} a'_{ii}(0) = \operatorname{spur} A'(0).$$

□

Ist allgemeiner $A(0)$ invertierbar, nicht notwendig gleich E_n, so verwenden wir $\det\, A(t) = \det A(0) \det \big(A(0)^{-1}A(t)\big)$. Es folgt, wobei (a^{ij}) die inverse Matrix zu (a_{ij}) bezeichnet,

$$(\det\, A)'(0) = \det A(0) \operatorname{spur} \big(A(0)^{-1}A'(0)\big) = \big(\det A(0)\big)\, a^{ij} a'_{ji}(0). \tag{2.12}$$

*Wir brauchen eine kleine Verallgemeinerung, da die rechte Seite explizit von t abhängt.

Satz 2.4 (Transportsatz). *Für jede Funktion* $f : \Omega \times [0,T] \to \mathbb{R}$ *gilt*

$$\frac{d}{dt} \int_{\phi_t(U)} f(t,y)\, dy|_{t=0} = \int_U \big(\partial_t f + \operatorname{div}(fu)\big)\, dx. \tag{2.13}$$

Proof. Bezeichne mit ∇u die Jacobimatrix bezüglich der Ortsvariablen. Es gilt

$$\frac{\partial}{\partial t} \nabla \phi_t(x)|_{t=0} = (\partial_t \nabla \phi)(x,0) = (\nabla \partial_t \phi)(x,0) = \nabla u(x,0).$$

Wegen $\phi_0(x) = x$ ist $\nabla \phi_0(x) = E_n$, also folgt mit Lemma 2.3

$$\frac{\partial}{\partial t} \det\, \nabla \phi_t(x)|_{t=0} = \operatorname{spur} \nabla u(x,0) = \operatorname{div} u(x,0).$$

Wir berechnen mit dem Transformationssatz[†]

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} \int_{\phi_t(U)} f(t,y)\, dy|_{t=0} &= \frac{d}{dt} \int_U f(\phi_t(x),t)\, \det\, \nabla \phi_t(x)\, dx|_{t=0} \\
&= \int_U \big(\partial_t f + \langle \nabla f, u\rangle + f \operatorname{div} u\big)(x,0)\, dx \\
&= \int_U \big(\partial_t f + \operatorname{div}(fu)\big)(x,0)\, dx.
\end{aligned}$$

□

Jetzt kommen wir zu den Erhaltungssätzen. Die im Volumen U enthaltene Masse soll unter dem Transport gleich bleiben. Bezeichnet $\varrho = \varrho(x,t)$ die Massendichte, so ergibt sich

$$0 = \frac{d}{dt} \int_{\phi_t(U)} \varrho(y,t)\, dy|_{t=0} = \int_U \big(\partial_t \varrho + \operatorname{div}(\varrho u)\big)\, dx.$$

Da das für alle U stimmt, folgt die Kontinuitätsgleichung

$$\partial_t \varrho + \operatorname{div}(\varrho u) = 0. \tag{2.14}$$

Die Gleichung gilt für alle Zeiten, denn wir können $t = 0$ beliebig wählen. Betrachte als zweites den Impulserhaltungssatz. Nach dem Newtonschen Grundgesetz ist die Zeitableitung des Impulses in $\phi_t(U)$ in $t = 0$ gleich die Summe der Kräfte, die auf $\phi_0(U) = U$ einwirken. Ohne Kräfte würden sich die Partikel unbeschleunigt bewegen, im allgemeinen ist das bei Erhaltung der Masse nicht möglich. Wir nehmen nun an, dass wir es mit einem idealen Fluid zu tun haben. Das bedeutet, die Kraft hat folgende Darstellung:

$$F = -\int_{\partial U} p\nu\, d\omega \quad \text{mit } p : \Omega \times [0,T] \to \mathbb{R},\ p = p(x,t). \tag{2.15}$$

[†] $\det\, \nabla \phi_t(x) > 0$ wegen $\det\, \nabla \phi_0(x) = \det\, E_n = 1$.

Hier ist ν die äußere Einheitsnormale; die skalare Funktion p heißt Druck. Aus dieser Hypothese und Satz 2.4 ergibt sich für die Komponenten des Impulses

$$\begin{aligned}\int_U \big(\partial_t(\varrho u_i) + \operatorname{div}(\varrho u_i u)\big)\,dx &= \frac{d}{dt}\int_U (\varrho u_i)(y,t)\,dy|_{t=0}\\ &= -\int_{\partial U} \langle p e_i, \nu\rangle\,d\omega\\ &= -\int_U \partial_i p\,dx.\end{aligned}$$

Das Volumen U ist wieder beliebig, also folgt

$$\partial_t(\varrho u_i) + \operatorname{div}(\varrho u_i u) + \partial_i p = 0 \quad \text{für } i = 1,\ldots,n. \tag{2.16}$$

Man nennt (2.14), (2.16) Eulergleichungen der Strömungsmechanik. Es sind $n+1$ Gleichungen für $n+2$ gesuchte Funktionen, nämlich ϱ, u_i, p. Man gelangt zu einem evtl. sinnvollen Problem, wenn man $\varrho \equiv 1$ setzt, das heißt das Fluid ist homogen und inkompressibel. Das System lautet dann

$$\begin{aligned}\partial_t u + u_j\partial_j u + \nabla p &= 0,\\ \operatorname{div} u &= 0.\end{aligned} \tag{2.17}$$

Berücksichtigt man zusätzlich Reibungskräfte innerhalb des Fluids, gelangt man zu den inkompressiblen Gleichungen von Navier-Stokes

$$\begin{aligned}\partial_t u - \nu\Delta u + u_j\partial_j u + \nabla p &= 0,\\ \operatorname{div} u &= 0.\end{aligned} \tag{2.18}$$

Eine elegante, formale Interpretation der inkompressiblen Eulergleichungen stammt von V. I. Arnold. Dabei betrachtet man die Strömung als Kurve

$$\phi : [0,T] \to \operatorname{Diff}(\Omega),\ t \mapsto \phi_t.$$

Es gelte $\varrho(x,0) \equiv 1$, dann ist die kinetische Energie

$$E(t) = \frac{1}{2}\int_\Omega \Big|\frac{\partial\phi}{\partial t}\Big|(x,t)^2\,dx = \frac{1}{2}\|\phi'(t)\|^2_{L^2(\Omega)}.$$

Externe Kräfte seien nicht vorhanden, die potentielle Energie sei also gleich Null. Mit dem Prinzip der stationären Wirkung hätten wir $\phi''(t) = 0$, aber es ist noch die Nebenbedingung der Inkompressibilität zu beachten. Damit sollte $\phi(t)$ eine Geodätische sein in der Untermannigfaltigkeit

$$\mathcal{M} = \{\psi \in \operatorname{Diff}(\Omega) : G(\psi) = 1\} \quad \text{wobei } G(\psi) = \det \nabla\psi.$$

Tangentialraum und Normalraum von $\mathcal{M}$ im Punkt $\psi = \mathrm{id}$ sind

$$\begin{aligned}T_{\mathrm{id}}\mathcal{M} &= \{u : \Omega \to \mathbb{R}^n |\ \operatorname{div} u = 0 \text{ in } \Omega,\ \langle u,\nu\rangle = 0 \text{ auf } \partial\Omega\},\\ T_{\mathrm{id}}\mathcal{M}^\perp &= \{\nabla p |\ p : \Omega \to \mathbb{R}\}.\end{aligned}$$

Formal folgt $\nabla p \in T_{\mathrm{id}}\mathcal{M}^{\perp}$ mit Gauß, genauer

$$\langle \nabla p, u\rangle_{L^2} = \int_\Omega \langle \nabla p, u\rangle\, dx = \int_{\partial\Omega} p\langle u,\nu\rangle\, d\omega - \int_\Omega p \operatorname{div} u\, dx = 0.$$

Die Helmholtzzerlegung sagt aus, dass alle Vektorfelder im Normalenraum Gradienten sind. Es ergibt sich die geodätische Gleichung, bei $t = 0$,

$$\phi''(0) = -\nabla p \quad \text{ für ein } p : \Omega \to \mathbb{R}.$$

Dies ist die Eulergleichung für den Impuls, denn

$$\phi''(0) = \frac{d}{dt} u(\phi(x,t),t)|_{t=0} = \partial_t u(x,0) + u_j(x,0)(\partial_j u)(x,0).$$

Nachlese. In diesem Kapitel haben wir die drei Prototypen von linearen partiellen Differentialgleichungen zweiter Ordnung gesehen: Laplacegleichung, Wärmeleitungsgleichung, Wellengleichung. Die drei stehen der Reihe nach für die Klasse der elliptischen, parabolischen und hyperbolischen Gleichungen. Schreiben wir die Operatoren in der Form $L = -a_{ij}\partial^2_{ij} u$, so ist

$$a_{ij} = \begin{cases} \operatorname{diag}(1,\ldots,1) & \text{wenn } L = -\Delta \\ \operatorname{diag}(0,1,\ldots,1) & \text{wenn } L = \partial_t - \Delta \\ \operatorname{diag}(-1,1,\ldots,1) & \text{wenn } L = \partial_t^2 - \Delta. \end{cases}$$

Typischerweise hat man für elliptische Gleichungen a priori Abschätzungen und Regularität der Lösungen. Für parabolische Gleichungen gilt das auch, die Wärmeverteilung am Anfang wird unter der Diffusion regularisiert. Lokalisierte Anfangsdaten beeinflussen die Lösung für $t > 0$ global, die die Ausbreitungsgeschwindigkeit ist unendlich groß. Hyperbolische Gleichungen haben keinen Regularisierungseffekt: für eine C^2-Lösung der Wellengleichung in $\mathbb{R}^3$ brauchen wir Anfangsdaten $u(\cdot,0) \in C^3$, $\partial_t u(\cdot,0) \in C^2$. Die Ausbreitungsgeschwindigkeit ist endlich.

Für die nichtlinearen Euler- und Navier-Stokes Gleichungen sind zentrale Fragen offen. Bei glatten Anfangsdaten hat man für Navier-Stokes Kurzzeitexistenz, es ist aber unklar, ob sich Singularitäten entwickeln. Alternativ gibt es ein zeitlich globales verallgemeinertes Lösungskonzept, die sogenannte schwache Lösung von Leray (1934), die Singularitäten mit einbezieht; es ist aber keine Eindeutigkeit bekannt. Im Fall der Euler-Gleichung gibt es sogar Gegenbeispiele zur Regularität, und zur Eindeutigkeit der schwachen Lösung.

Aufgabe 1 Zeigen Sie, dass die Wellengleichung die Euler-Lagrange Gleichung des Wirkungsintegrals ist.

Aufgabe 2 Betrachten Sie für $u : \mathbb{R} \times [0,\infty) \to \mathbb{R}$ die Burgers Gleichung

$$\partial_t u + u\, \partial_x u = 0.$$

Wir wählen als Anfangsdaten

$$g(x) = \begin{cases} 1 & \text{für } x \leq 0 \\ 0 & \text{für } x \geq 1 \\ 1 - x & \text{für } 0 \leq x \leq 1. \end{cases}$$

Zeigen Sie, dass C^1-Lösungen längs der Kurven $\phi(x,t) = x + tg(x)$ konstant sind. Folgern Sie, dass das Anfangswertproblem keine C^1-Lösung hat.

Aufgabe 3 Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ beschränktes Gebiet, und $u : \Omega \to \mathbb{R}$ harmonisch. Studieren Sie mit der Mittelwerteigenschaft die Situation, wenn u in Ω ein globales Maximum annimmt.

Aufgabe 4 Überlegen Sie, unter welchen Transformationen die Laplacegleichung, die Wärmeleitungsgleichung sowie die Wellengleichung invariant sind (Drehungen, Streckungen,...).

Um in die Welt der partiellen Differentialgleichungen einzusteigen, gibt es eine Reihe von Texten, alle mit Vor- und Nachteilen. Hier eine kleine Liste.

Literatur

[1] De Lellis, C., Székelyhidi, L., *Continuuous dissipative Euler flows and a conjecture of Onsager*, to appear in Proc. Eur. Congress of Mathematics (siehe Homepage De Lellis).

[2] Courant, R., Hilbert, D., *Methoden der Mathematischen Physik I,II*, Springer Verlag Berlin Heidelberg New York 1968.

[3] Evans, L.C., *Partial Differential Equations*, Amer. Math. Soc. (Graduate Studies in Math. Vol. 19), AMS, Providence 1998.

[4] Fefferman, C.L., *Existence and smoothness of the Navier-Stokes equation*, http://www.claymath.org/millenium-problems/navier-stokes-equation.

[5] Jost, J., *Partielle Differentialgleichungen. Elliptische und parabolische Gleichungen*, Springer Verlag, Berlin Heidelberg 1998.

[6] Logan, J.D., *Applied Partial Differential Equations*, Springer Undergraduate Texts in Mathematics, Springer-Verlag, New York 2004

[7] Strauss, W.A., *Partielle Differentialgleichungen (Eine Einführung)*, Vieweg Lehrbuch Mathematik, Vieweg, Braunschweig/Wiesbaden 1995.

3

Das Maximumprinzip

Die Theorie der Differentialgleichungen hat sich im 20^{ten} Jahrhundert weit entwickelt und benötigt oft technische Hilfsmittel. Dies steht dem Ziel der Veranstaltung, die Aussagekraft der Analysis zu demonstrieren, teilweise entgegen. Als ich mich bei der Vorbereitung fragte, welche Methoden überhaupt geeignet sind, um sie in unserem Rahmen zu präsentieren, stand das Maximumprinzip sofort an erster Stelle. Die Idee des Beweises ist sehr einfach, und es gibt zahlreiche interessante Anwendungen, zum Beispiel in der Geometrie.

3.1 Das Maximumprinzip

Vorübung: Sei $u'' \geq 0$ auf (a,b), sprich $u(x)$ ist konvex. Der Graph von u liegt dann oberhalb jeder Tangenten:

$$u(x) \geq u(x_0) + u'(x_0)(x - x_0) \quad \text{für alle } x, x_0 \in (a,b).$$

Nimmt $u(x)$ das Supremum in x_0 an, so folgt $u'(x_0) = 0$ und weiter $u(x) \geq u(x_0)$ für alle $x \in (a,b)$, also u konstant. Das folgende Resultat ist eine weitreichende Verallgemeinerung.

Satz 3.1 (Maximumprinzip von Hopf). *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein Gebiet* und $u : \Omega \to \mathbb{R}$ sei Lösung der Ungleichung*

$$Lu(x) = a_{ij}(x)\partial_{ij}^2 u(x) + b_i(x)\partial_i u(x) \geq 0 \quad \text{in } \Omega. \tag{3.1}$$

Der Operator L sei elliptisch, genauer soll für ein $\lambda > 0$ gelten

$$a_{ij}(x)\xi_i\xi_j \geq \lambda|\xi|^2 \quad \text{für alle } x \in \Omega,\ \xi \in \mathbb{R}^n. \tag{3.2}$$

Existiert dann $x_0 \in \Omega$ mit $u(x_0) = \sup_{x\in\Omega} u(x)$, so ist u konstant.

Zusatz. *Im Spezialfall $\sup_{x\in\Omega} u(x) = 0$ gilt der Schluss auch für $Lu + cu \geq 0$, also mit einem Zusatzterm nullter Ordnung.*

*offen und zusammenhängend

Bedingung (3.2) bedeutet, dass L vom Typ des Laplaceoperators ist. Für $L = \Delta$ ist ja $a_{ij} = \delta_{ij}$ und (3.2) gilt mit $\lambda = 1$. Achtung: $\Delta u \geq 0$ bedeutet keineswegs, dass $u(x)$ konvex ist; $u(x,y) = x^2 - y^2$ ist harmonisch aber nicht konvex.

Proof. (Skizze) Durch eine lineare Koordinatentransformation können wir annehmen dass $a_{ij}(x_0) = \delta_{ij}$. Da x_0 Maximalstelle, gilt $Du(x_0) = 0$. Also folgt

$$Lu(x_0) = a_{ij}(x_0)\partial^2_{ij}u(x_0) + b_i(x_0)\partial_i u(x_0) = \sum_{i=1}^n \partial_i^2 u(x_0).$$

Aber weiter gilt, da x_0 Maximalstelle,

$$\partial_i^2 u(x_0) = \frac{d^2}{dt^2}u(x_0 + te_i)|_{t=0} \leq 0.$$

Also folgt $Lu(x_0) \leq 0$. Unter der etwas stärkeren Annahme $Lu > 0$ in Ω ergibt sich ein Widerspruch, das heißt u kann kein Maximum in Ω haben. Im Grenzfall $Lu \geq 0$ ergibt eine genauere Analyse: das Maximum kann nur dann vorkommen, wenn u konstant ist. □

Satz 3.2 (Eindeutigkeit für das Dirichletproblem). *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ beschränktes Gebiet. Dann hat das Problem*

$$Lu = f \text{ in } \Omega, \; u = g \text{ auf } \partial\Omega,$$

höchstens eine Lösung $u \in C^0(\overline{\Omega}) \cap C^2(\Omega)$.

Proof. Subtrahieren wir zwei Lösungen $u_{1,2}$, so bekommen wir eine Lösung von $Lu = 0$, mit $u = 0$ auf dem Rand. Wir müssen zeigen, dass dieses u die Nullfunktion ist. Wäre $\sup_{\overline{\Omega}} u > 0$, so wird das Supremum in $x_0 \in \Omega$ angenommen. Nach Satz 3.1 ist dann $u(x) \equiv u(x_0) > 0$ auf Ω. Also ist u nicht stetig am Rand, Widerspruch. Analog argumentieren wir für $-u$. □

3.2 Maximumprinzip und Minimalflächen

In diesem Abschnitt betrachten wir zweidimensionale Flächen im $\mathbb{R}^3$, wobei wir oft eine Parametrisierung $f : U \to \Sigma \subset \mathbb{R}^3$ auf einem Gebiet $U \subset \mathbb{R}^2$ zugrunde legen. Der Flächeninhalt ist das Funktional

$$A(f) = \int_U \sqrt{\det g(x)}\, dx \quad \text{mit } g_{ij} = \langle \partial_i f, \partial_j f\rangle. \tag{3.3}$$

Der Integrand ist der Flächeninhalt des Parallelogramms, das von den Vektoren $\partial_1 f, \partial_2 f$ aufgespannt wird:

$$\sqrt{\det g} = \sqrt{|\partial_1 f|^2 |\partial_2 f|^2 - \langle \partial_1 f, \partial_2 f\rangle^2} = |\partial_1 f \times \partial_2 f|.$$

Analog zur Notation bei Kurven schreiben wir $dA = \sqrt{\det g}\, dx$. Bei Kurven ist der Krümmungsvektor $\vec{\varkappa}$ der (negative) L^2-Gradient der Bogenlänge. Die entsprechende Rolle beim Flächeninhalt spielt der mittlere Krümmungsvektor $\vec{H}$. Um Randterme zu vermeiden, betrachten wir hier nur Variationsfelder mit kompaktem Träger.

Satz 3.3 (Erste Variation des Flächeninhalts). *Sei $f : U \times (-t_0, t_0) \to \mathbb{R}^3$ eine Flächenschar mit $\phi = \partial_t f(\cdot, 0) \in C^1_c(U, \mathbb{R}^3)$. Dann gilt*

$$\frac{d}{dt} A(f(\cdot, t))|_{t=0} = -\int_U \langle \vec{H}, \phi \rangle \, dA. \tag{3.4}$$

$\vec{H}$ heißt mittlerer Krümmungsvektor. Ist (g^{ij}) inverse Matrix zu (g_{ij}), so gilt

$$\vec{H} = \frac{1}{\sqrt{\det g}} \partial_i \big(\sqrt{\det g} g^{ij} \partial_j f \big) =: \Delta_g f. \tag{3.5}$$

Die nachstehende Herleitung kann erstmal übersprungen werden.

Proof. Mit $\partial_t \partial_i f(x, 0) = \partial_i \partial_t f(x, 0) = \partial_i \phi(x)$ berechnen wir

$$\frac{\partial}{\partial t} g_{ij}|_{t=0} = \langle \partial_i \phi, \partial_j f \rangle + \langle \partial_i f, \partial_j \phi \rangle.$$

Formel (2.12) für die Ableitung der Determinante liefert

$$\frac{\partial}{\partial t} \sqrt{\det g} = \frac{1}{2} \sqrt{\det g} g^{ij} \frac{\partial g_{ji}}{\partial t}|_{t=0} = \sqrt{\det g} g^{ij} \langle \partial_i \phi, \partial_j f \rangle|_{t=0}.$$

Da ϕ Nullrandwerte hat, können wir ∂_i partiell integrieren und erhalten

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} A(f(\cdot, t))|_{t=0} &= -\int_U \langle \partial_i \big(\sqrt{\det g} g^{ij} \partial_j f \big), \phi \rangle \, dx \\ &= -\int_U \Big\langle \frac{1}{\sqrt{\det g}} \partial_i \big(\sqrt{\det g} g^{ij} \partial_j f \big), \phi \Big\rangle \, dA. \end{aligned}$$

□

Der Vektor $\vec{H}$ steht senkrecht auf die Fläche. Dies liegt daran, dass man ein tangentiales Variationsfeld ϕ durch eine Schar von Umparametrisierungen realisieren kann. Der Flächeninhalt ist aber invariant unter Umparametrisierungen, also ist die erste Variation für alle tangentialen ϕ gleich Null, und der Vektor $\vec{H}$ muss normal sein.

Sei $\nu : U \to \mathbb{R}^3$, $|\nu| = 1$, die Einheitsnormale der Fläche. Es gilt dann die Darstellung

$$\vec{H} = H\, \nu \quad \text{mit } H : U \to \mathbb{R}.$$

Die Funktion H heißt mittlere Krümmung. Im Beispiel der runden Sphäre mit Radius $R > 0$ ist $H = \frac{2}{R}$ bezüglich der nach innen weisenden Einheitsnormalen. Eine Minimalfläche ist eine Lösung der Gleichung $H \equiv 0$, im Fall H konstant spricht man von einer *CMC*-Fläche (*constant mean curvature*). Allgemeiner könnte die mittlere Krümmung durch eine Funktion $K : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ vorgeschrieben werden, also $H = K \circ f$.

Wir wollen die Sache im wichtigen Fall von Graphen betrachten, also $f : U \to \mathbb{R}^3$, $f(x) = (x, u(x))$. Es gilt

$$dA = \sqrt{1 + |\nabla u|^2}\, dx \quad \text{und} \quad \nu = \frac{(-\nabla u, 1)}{\sqrt{1+|\nabla u|^2}}.$$

Damit berechnen wir für eine Variation $\phi = (0, 0, \varphi)$

$$\begin{aligned}
-\int_U H\varphi\, dx &= -\int_U \langle \vec{H}, \phi\rangle\, dA \\
&= \frac{d}{dt} A(f + t\phi)|_{t=0} \\
&= \frac{d}{dt}\int_U \sqrt{1 + |\nabla u + t\nabla\varphi|^2}\, dx|_{t=0} \\
&= \int_U \Big\langle \frac{\nabla u}{\sqrt{1+|\nabla u|^2}}, \nabla\varphi\Big\rangle\, dx \\
&= -\int_U \operatorname{div} \frac{\nabla u}{\sqrt{1+|\nabla u|^2}}\ \varphi\, dx.
\end{aligned}$$

Für die mittlere Krümmung folgt

$$H = \operatorname{div} \frac{\nabla u}{\sqrt{1+|\nabla u|^2}}. \tag{3.6}$$

Satz 3.4 (Vergleichsprinzip). *Für $u_0, u_1 : \Omega \to \mathbb{R}$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ Gebiet, setze*

$$\operatorname{div} \frac{\nabla u_i}{\sqrt{1+|\nabla u_i|^2}} = H_i. \tag{3.7}$$

Es gelte $H_0 \leq H_1$ in Ω. Ist dann $u_0 \geq u_1$ und $u(x_0) = u(x_1)$, so folgt $u_0 \equiv u_1$.

Proof. Wir differenzieren die Gleichung zunächst aus:

$$\begin{aligned}
\partial_i\big((1+|\nabla u|^2)^{-\frac{1}{2}}\partial_i u\big) &= (1+|\nabla u|^2)^{-\frac{1}{2}}\partial_i^2 u - \frac{1}{2}\big((1+|\nabla u|^2)^{-\frac{3}{2}} 2\partial_i u \partial_j u \partial_{ij}^2 u \\
&= (1+|\nabla u|^2)^{-\frac{3}{2}}\Big((1+|\nabla u|^2)\delta_{ij} - \partial_i u\partial_j u\Big)\,\partial_{ij}^2 u \\
&=: A_{ij}(\nabla u)\partial_{ij}^2 u.
\end{aligned}$$

Damit schreiben wir, mit $\ldots = t\nabla u_1 + (1-t)\nabla u_0$,

$$\begin{aligned}
0 &\leq H_1 - H_0 \\
&= A_{ij}(\nabla u_1)\partial^2_{ij}u_1 - A_{ij}(\nabla u_0)\partial^2_{ij}u_0 \\
&= \int_0^1 \frac{d}{dt}\Big(A_{ij}(t\nabla u_1 + (1-t)\nabla u_0)(t\partial^2_{ij}u_1 + (1-t)\partial^2_{ij}u_0)\Big)\,dt \\
&= \underbrace{\int_0^1 A_{ij}(\ldots)\,dt}_{=:a_{ij}}\ \partial^2_{ij}(u_1 - u_0) \\
&\quad + \underbrace{\int_0^1 \frac{\partial A_{ij}}{\partial p_k}(\ldots)\big(t\partial^2_{ij}u_1 + (1-t)\partial^2_{ij}u_0\big)\,dt}_{=:b_k}\ \partial_k(u_1 - u_0) \\
&= a_{ij}(x)\partial^2_{ij}(u_1 - u_0) + b_i(x)\partial_i(u_1 - u_0).
\end{aligned}$$

Man kann nachrechnen, dass die Koeffizienten a_{ij} elliptisch sind. Nach Voraussetzung hat $u_1 - u_0$ in x_0 ein Maximum mit Funktionswert Null. Aus dem Maximumprinzip, Satz 3.1, folgt $u_1 \equiv u_0$. □

Folgerung 3.1 (Eindeutigkeitssatz). *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ beschränktes Gebiet und $H \in C^0(\Omega)$. Dann hat das Problem*

$$\operatorname{div} \frac{\nabla u}{\sqrt{1+|\nabla u|^2}} = H \ \text{in } \Omega,\ u = g \ \text{auf } \partial\Omega,$$

höchstens eine Lösung $u \in C^0(\overline{\Omega}) \cap C^2(\Omega)$.

Folgerung 3.2 (konvexe Hülleneigenschaft). *Sei Σ eine kompakte, zusammenhängende Minimalfläche mit Rand $\partial\Sigma$. Dann liegt Σ in der konvexen Hülle von $\partial\Sigma$.*

Proof. Wir zeigen: liegt $\partial\Sigma$ im Halbraum $\{x_3 \leq 0\}$, so auch Σ. Andernfalls finden wir eine Ebene $E = \{x_3 = a\}$ mit $a > 0$, die Σ in einem Punkt p berührt. In der Nähe von p ist Σ als Graph über E darstellbar. Nach Satz 3.4 liegt Σ dann lokal in der Ebene. Mit einem Zusammenhangsargument folgt, dass Σ insgesamt in der Ebene enthalten ist, und damit auch der Rand von Σ, Widerspruch. Die konvexe Hülle von $\partial\Sigma$ ist genau der Schnitt aller Halbräume, die $\partial\Sigma$ enthalten; also ist die Folgerung gezeigt. □

Folgerung 3.3 (Halbraumsatz). *Sei Σ eine eigentlich eingebettete Minimalfläche ohne Rand. Liegt Σ in $\{x_3 \leq 0\}$, so ist Σ eine horizontale Ebene.*

Proof. (Skizze) Wir können annehmen, dass Σ nicht in einem kleineren Halbraum $\{x_3 \leq -a\}$ mit $a > 0$ enthalten ist. Andernfalls wählen wir a maximal und verschieben die Fläche um a nach oben. Falls nun Σ die Ebene $\{x_3 = 0\}$

irgendwo berührt, ist $\Sigma = \mathbb{R}^2$ mit dem Argument von Folgerung 3.2; beachte hier $\partial\Sigma = \emptyset$. Andernfalls betrachte das Halbkatenoid

$$C = \{(x,z) : z = \operatorname{Arcosh}(|x|) \text{ mit } |x| \geq 1\}.$$

Man kann das Katenoid um $a > 0$ nach unten schieben, ohne dass Σ berührt wird. Dann skaliert man C mit Faktor $\alpha \in (0,1]$; auch dabei kann keine Berührung passieren. Es ergibt sich $\Sigma \subset \{x_3 \leq -a\}$, ein Widerspruch. □

Folgerung 3.4 (Trennungssatz). *Sei Σ eine kompakte Minimalfläche mit zwei Randkomponenten $\partial\Sigma = \Gamma_+ \cup \Gamma_-$. Es gibt eine Konstante $\alpha \in (0,\infty)$ mit folgender Eigenschaft: ist*

$$\begin{aligned}\Gamma_+ &\subset \{(x,z) \in \mathbb{R}^{n+1} : z \geq \alpha|x|\},\\ \Gamma_- &\subset \{(x,z) \in \mathbb{R}^{n+1} : z \leq -\alpha|x|\},\end{aligned}$$

so ist Σ nicht zusammenhängend.

Proof. (Skizze) Auch hier kann die Fläche durch skalierte Katenoide wie oben eingegrenzt werden. □

3.3 Maximumprinzip und Symmetrie

Es ist eine interessante Frage, ob Lösungen von Differentialgleichungen oder von Variationsproblemen so symmetrisch sind wie die gegebenen Daten. Im allgemeinen ist das nicht so. Suchen wir zum Beispiel die kürzeste Kurve, die in einem Quadrat den Flächeninhalt $A > 0$ abtrennt, so ist für kleine A die Lösung ein Viertelkreis, der in einer Ecke sitzt. Natürlich sind die Viertelkreise in den anderen Ecken auch Minima, so dass keine Eindeutigkeit vorliegt. Das Maximumprinzip ist bei Fragen der Eindeutigkeit und Symmetrie ein starkes Hilfsmittel.

Satz 3.5 (Alexandrov). *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ ein beschränktes Gebiet. Hat $\Sigma = \partial\Omega$ konstante mittlere Krümmung, so ist Ω ein runder Ball.*

Proof. Betrachte eine Ebene $E(s) = \{(x,y,z) : z = s\}$, so dass Ω unterhalb von $E(s)$ liegt. Schiebe $E(s)$ nach unten, bis Ω zum ersten Mal berührt wird. Kein Problem, zu so einer Berührung sagt unser Vergleichsprinzip nichts. Schieben wir etwas weiter, so zerlegt $E(s)$ das Gebiet Ω in die Mengen

$$E^+(s) = \{(x,y,z) \in \Omega : z > s\} \quad \text{und} \quad E^-(s) = \{(x,y,z) \in \Omega : z < s\}.$$

Wir spiegeln $E^+(s)$ nach unten und erhalten das Gebiet

$$E^*(s) = \{(x,y,2s-z) : (x,y,z) \in E^+(s)\}.$$

Das Gebiet $E^*(s)$ ist zunächst in Ω enthalten. Wir schieben nun weiter nach unten solange das der Fall ist. Es gibt eine Grenzebene $E(s_*)$, wo es nicht mehr weiter geht. Eine Ebene die von unten berührt erfüllt offensichtlich nicht mehr die Bedingung. Was hindert uns am Weiterschieben? Eine Möglichkeit ist, dass der Rand von $E^*(s)$ den Rand von $E^-(s_*)$ irgendwo berührt. Beide Flächen haben bezüglich der inneren Normalen dieselbe mittlere Krümmung. Nach dem Vergleichsprinzip, Satz 3.4, stimmen die Flächen lokal überein. Mit topologischen Argumenten wir gehabt folgt dann, dass $E^*(s_*)$ und $E^-(s_*)$ gleich sind, das heißt $E(s_*)$ ist eine Symmetrieebene von Ω. Nun gibt es noch eine zweite Möglichkeit, warum es nicht mehr weiter geht, nämlich eine Berührung am Rand der beiden Flächen. Für diese gibt es zum Glück einen Zusatz zum Maximumprinzip, das Randpunktlemma von Hopf. Damit kann man auch im zweiten Fall zeigen dass $E(s_*)$ Symmetrieebene ist. Insgesamt sehen wir, dass Ω in jeder Richtung eine Symmetrieebene hat. Damit lässt sich zeigen, dass Ω ein Ball ist. □

Die Methode von Alexandrov mittels *moving planes* ist später auf semilineare elliptische Differentialgleichungen angewandt worden. Der folgende Satz hat in google scholar etwa 2.500 Zitate, für eine mathematische Arbeit ist das sehr viel.

Satz 3.6 (Gidas, Ni, Nirenberg). *Zu gegebenem $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sei $u \geq 0$ Lösung des Dirichletproblems*

$$\begin{aligned} -\Delta u &= f(u) \quad \text{in } B = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| < 1\}, \\ u &= 0 \quad \text{auf } \partial B. \end{aligned}$$

Dann ist u rotationssymmetrisch, genauer $u = g(|x|)$ mit g streng fallend.

Nachlese. Die wesentliche Voraussetzung im Satz von Alexandrov ist, dass die Fläche keine Selbstdurchdringungen hat. Ein Satz von Hopf besagt, dass auf diese Bedingung verzichtet werden kann, sofern die Fläche den topologischen Typ der Sphäre hat; das wiederum ist im Satz von Alexandrov nicht vorausgesetzt. Da die Sätze komplementär sind, hat man erwartet dass beide Voraussetzungen unnötig sind. Aber H. Wente hat 1984 eine CMC-Fläche vom Typ des Torus konstruiert. Im selben Jahr hat C. Costa die erste eingebettete Minimalfläche im $\mathbb{R}^3$ gefunden nach Eulers Berechnung des Katenoids (1744).

Ein berühmtes Ergebnis, auf den ersten Blick ähnlich zum Halbraumsatz, ist folgender Satz.

Satz 3.7 (von Bernstein). *Ein minimaler Graph über $\mathbb{R}^2$ ist eine Ebene.*

Das kann (meines Wissens) nicht mit dem Maximumprinzip gezeigt werden, aber es gibt einen Beweis mit dem Satz von Liouville. In höheren Dimensionen, also für n-dimensionale minimale Graphen im $\mathbb{R}^{n+1}$, hat der Satz von Bernstein eine Geschichte: er wurde der Reihe nach gezeigt für $n = 3$ (De Giorgi), $n = 4$ (Almgren) und $n \leq 7$ (Simons). Es stellte sich heraus, dass der Satz für $n \geq 8$ aber falsch ist (Bombieri, De Giorgi, Giusti). Das Problem ist eng verbunden mit der Regularität von orientierten minimierenden Hyperflächen im $\mathbb{R}^n$, insbesondere von Kegeln; das wurde zuerst von Fleming bemerkt. Für $n \geq 8$ können diese Flächen Singularitäten haben. Nur am Rande: Simons ist später ein extrem erfolgreicher Fondsmanager geworden, und er hat unter anderem das MFO unterstützt.

Aufgabe 1 Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt, und $u \in C^0(\overline{\Omega}) \cap C^0(\Omega)$ sei Lösung von $\Delta u \geq 0$. Zeigen Sie

$$\max_{x \in \overline{\Omega}} u(x) = \max_{x \in \partial\Omega} u(x).$$

Anleitung. Betrachten Sie $u_\varepsilon(x) = u(x) + \varepsilon |x|^2$.

Aufgabe 2 Bestimmen Sie die Minimalfläche, die durch Rotation einer Kurve $z = u(x)$ um die x-Achse entsteht.
Anleitung. Leiten Sie für den Flächeninhalt die Formel

$$A(f) = 2\pi \int_a^b u(x)\sqrt{1 + u'(x)^2}\, dx$$

her. Um die Gleichung zu integrieren, verwenden Sie dass $u/\sqrt{1 + (u')^2}$ eine Erhaltungsgröße ist.

Aufgabe 3 Führen Sie den Beweis des Satzes von Alexandrov zuende: wenn Ω in jeder Richtung eine Symmetrieebene hat, so ist Ω (bezüglich eines geeigneten Punkts) rotatationssymmetrisch.

Aufgabe 4 Nach Gauß kann jede Fläche im $\mathbb{R}^3$ lokal konform parametrisiert werden, das heißt

$$g_{ij} = e^{2u}\delta_{ij} \qquad \text{für eine Funktion } u : U \to \mathbb{R}.$$

Zeigen Sie, dass f in dieser Parametrisierung genau dann eine Minimalfläche ist, wenn die Komponenten klassische harmonische Funktionen sind. Hieraus ergibt sich ein enger Bezug der Theorie zweidimensionaler Minimalflächen zur Funktionentheorie. Insbesondere gibt es Formeln, die Minimalflächen durch holomorphe Funktionen beschrieben (die Weierstraßdarstellung).

Literatur

[1] Almgren, F.J., *An invitation to varifold geometry*, W.A. Benjamin Inc., New York - Amsterdam, 1966.

[2] Boys, C.V., *Soap bubbles and the forces which mould them*, 1896, http://www.gutenberg.org/files/33370/33370-h/33370-h.htm.

[3] Eschenburg, J.-H., Jost, J., *Differentialgeometrie und Minimalflächen*, 3. Auflage, Springer Spektrum, Springer Verlag, Berlin Heidelberg 2014.

[4] Karcher, H., Polthier, K., *Die Geometrie von Minimalflächen*, Moderne Mathematik (Hrsgb. G. Faltings), Spektrum Akademischer Verlag, Heidelberg, Berlin, Oxford 1996.

[5] Osserman, R., *A survey of minimal surfaces*, 2^{nd} edition, Dover publications Inc., New York 1986.

4

Geometrische Flüsse

Im letzten Kapitel wollen wir einige geometrische Flüsse vorstellen, die in den letzten 30 Jahren intensiv studiert worden sind. Ich hoffe, dass Ihnen ein solcher Einblick gefällt, auch wenn er naturgemäß nur sehr kurz sein kann. Die Grundidee von vielen geometrischen Flüssen ist, zu einer geometrisch motivierten Energie einen Gradientenfluss zu definieren. Wie wir unten sehen werden, kann die Energie zum Beispiel die Bogenlänge, der Flächeninhalt oder auch ein Krümmungsintegral sein. Die generelle Erwartung ist, dass der Fluss die betrachtete Größe gleichmäßig verteilt, analog zur Temperaturdichte bei der Wärmeleitung, so dass für Zeit $t \nearrow \infty$ ein spezielles und eventuell kanonisches geometrisches Objekt entsteht. Davon abgesehen sind die geometrischen Flüsse auch in den Anwendungen von Interesse, worauf wir hier aber nicht näher eingehen.

4.1 Curve Shortening Flow

Eine Schar von Kurven $f : I \times [0,T) \to \mathbb{R}^2$, $f = f(x,t)$, heißt curve shortening flow (CSF), wenn gilt:

$$\partial_t f = \vec{\varkappa} \quad \text{auf } I \times (0,T). \tag{4.1}$$

Das allereinfachste Beispiel ist ein kontrahierender Kreis

$$f : \mathbb{S}^1 \times [0,T) \to \mathbb{R}^2,\ f(\omega,t) = r(t)\omega \quad \text{mit } r(0) = R.$$

Es gilt $\varkappa(t) = 1/r(t)$ bezüglich der inneren Normalen $\nu(t) = -\omega$, also ist f Lösung genau wenn

$$r'(t)\omega = -\frac{1}{r(t)}\omega \quad \text{bzw.} \quad r(t) = \sqrt{R^2 - t}.$$

Die Lösung existiert bis zur Zeit $T = R^2$, für $t \nearrow T$ gilt $\varkappa(t) = (T-t)^{-1/2} \nearrow \infty$.

Als nächstes suchen wir Lösungen $f(x,t) = (x, u(x,t))$, also Graphen. Dann ist $\partial_t f = (0, \partial_t u)$, also geht der Fluss in vertikaler Richtung. Da $\vec{\varkappa}$ normal zur Fläche ist und im allgemeinen nicht vertikal, hat die Gleichung $\partial_t f = \vec{\varkappa}$

keine Lösung als Graph, außer wenn u konstant ist. Es reicht aber aus, wenn die Normalkomponente von $\partial_t f$ gleich $\vec{\varkappa}$ ist. Die tangentiale Komponente kann immer mit einer Reparametriserung $f(\varphi(x,t),t)$ zu Null gemacht werden, ohne die Flächen zu ändern. Daher suchen wir Lösungen der Gleichung

$$\langle \partial_t f, \nu \rangle = \varkappa. \tag{4.2}$$

Der Ansatz als Graph führt dabei auf

$$\partial_t u = \frac{\partial_x^2 u}{1 + (\partial_x u)^2}. \tag{4.3}$$

Spezielle Lösung von (4.3) ist der *grim reaper*, auf deutsch *die Sense*:

$$u : \big(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\big) \times \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ u(x,t) = t - \log\cos x. \tag{4.4}$$

Zur Namensbildung siehe unten. Der erste Schritt der Analysis des CSF ist analog zu den gewöhnlichen Differentialgleichungen.

Satz 4.1 (Kurzzeitexistenz des MCF). *Sei $f_0 : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{R}^2$ eine glatte, reguläre Kurve. Dann hat CSF eine maximale glatte Lösung*

$$f : \mathbb{S}^1 \times [0,T) \to \mathbb{R}^2 \quad \textit{mit } f(\cdot,0) = f_0.$$

Proof. (*Idee*) Sei ν_0 die Einheitsnormale von f_0. Wir machen den Ansatz

$$f(\omega,t) = f_0(\omega) + u(\omega,t)\nu_0(\omega),$$

das heißt die Lösung ist als Graph über der Anfangsfläche dargestellt. Die Gleichung (4.2) führt dann auf eine Differentialgleichung für $u(\omega,t)$, die qualitativ ähnlich zu (4.3) ist. Dies ist eine Wärmeleitungsgleichung mit einem Diffusionskoeffizienten, der von $\partial_x u$ abhängt. Es kommt nun darauf an, für die lineare Wärmeleitungsgleichung $\partial_t u = a(x)\partial_x^2 u + b(x)\partial_x u$ gute a priori Abschätzungen zu haben. Dann kann die Kurzzeitexistenz mit einem Fixpunktargument bewiesen werden. $\square$

Es geht nun darum, das globale Verhalten des CSF zu verstehen. Da die Parametrisierung unwesentlich für die Geometrie ist, arbeitet man oft mit den Bildkurven $\Gamma(t) \subset \mathbb{R}^2$. Das geht jedenfalls dann, wenn es keine Selbstüberschneidungen gibt.

Satz 4.2 (Barrierenprinzip). *Seien $U(t)$ Gebiete und $\Gamma(t)$ geschlossene Kurven in $\mathbb{R}^2$, und $\partial U(t)$ sowie $\Gamma(t)$ seien Lösungen des CSF. Gilt dann $\Gamma(0) \subset U(0)$, so folgt $\Gamma(t) \subset U(t)$ für alle $t \in [0,T)$.*

Zusammen mit dem Kreis als Beispiel folgt, dass der Fluss einer geschlossenen Kurve maximale Existenzdauer $T < \infty$ hat. Auch den Namen *grim reaper* können wir jetzt erklären: geschlossene Kurven, die sich bei $t = 0$ im konvexen Innengebiet befinden, müssen verschwunden sein, wenn *die Sense* vorbeikommt. Das Hauptresultat zum CSF ist wie folgt.

Satz 4.3 (Gage, Hamilton, Grayson). *Sei $\Gamma_0 \subset \mathbb{R}^2$ eine glatte, einfach geschlossene Kurve, und $\Gamma(t)$, $t \in [0,T)$, die zugehörige maximale glatte Lösung des CSF. Dann gilt:*

(1) *$\Gamma(t)$ ist für alle $t \in [0,T)$ einfach geschlossen.*

(2) *Es gibt ein $t_1 < T$, so dass $\Gamma(t)$ für $t \in [t_1, T)$ konvex ist.*

(3) *Für $t \nearrow T$ ist $\Gamma(t)$ asymptotisch rund.*

Wenn die Anfangskurve Selbstüberschneidungen hat, ist dieses gute Szenario nicht immer gültig. Ein Beispiel von der Form einer Kardioide entwickelt eine Singularität. Genauer zieht sich die innere Schlaufe zusammen, bevor der Gesamtdurchmesser gegen Null geht; die Krümmung geht dabei gegen Unendlich. Durch Reskalierung (*blow-up*) kann man in diesem Fall eine Folge von Flüssen konstruieren, die gegen den grim reaper konvergiert. Es ist relevant für den Satz, dass eine solche Singularität bei eingebetteten Kurven nicht auftreten kann. Eine schöne geometrische Begründung hat G. Huisken gefunden: er betrachtet die Sehnen-Bogen-Konstante

$$\Delta(\Gamma) = \inf_{p,q \in \Gamma} \delta(p,q) \qquad \text{mit } \delta(p,q) = \begin{cases} \frac{\pi|p-q|}{L} \Big/ \sin \frac{\pi d_\Gamma(p,q)}{L} & \text{für } p \neq q, \\ 1 & \text{für } p = q. \end{cases}$$

Für einfach geschlossene Kurven folgt aus einem Maximumprinzip, dass $\Delta(\Gamma(t))$ längs des CSF wachsend ist, und damit nach unten beschränkt. Dies kontrolliert die Eingebettetheit der Kurven.

4.2 Mean Curvature Flow

Eine Schar von parametrisierten Flächen $f : U \times [0,T) \to \mathbb{R}^3$, $f = f(x,t)$, ist ein mittlerer Krümmungsfluss (MCF), wenn gilt:

$$\partial_t f = \vec{H} \qquad \text{auf } U \times (0,T). \tag{4.5}$$

Analog zum CSF ist der MCF der L^2-Gradientenfluss des Flächenfunktionals. Die Frage der Kurzzeitexistenz ist sehr ähnlich wie beim CSF, so dass wir auf die Diskussion verzichten können. Als erstes Beispiel haben wir die runde Sphäre

$$f : \mathbb{S}^2 \times [0,T) \to \mathbb{R}^3,\ f(\omega,t) = \sqrt{R^2 - 4t}\,\omega.$$

Die Lösung existiert nur für $t < T = R^2/4$ und für $t \nearrow T$ geht die Krümmung gegen Unendlich. Eine offensichtliche Lösung ist auch der Kreiszylinder

$$f : \mathbb{S}^1 \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3,\ f(\omega,z) = (\sqrt{R^2 - t}\,\omega, z).$$

Es stellt sich heraus, dass die Eingebettetheit keine ausreichende Voraussetzung ist, um Singularitäten zu verhindern. Ein oft zitiertes Beispiel ist eine Fläche von der Form einer Hantel (*dumbbell*). In der Mitte ist ein Kreiszylinder mit Radius $r(t)$, die Kugeln außen haben Radius $R(t) \gg r(t)$. Anschaulich schrumpft der Zylinder dann viel schneller als die Kugeln, so dass eine Singularität entsteht. Dieses Argument hieb- und stichfest zu machen ist aber nicht ganz einfach. Als positives Ergebnis haben wir folgenden Satz.

Satz 4.4 (Huisken). *Sei Γ_0 eine glatte, geschlossene, konvexe Fläche, und $\Gamma(t)$ sei die zugehörige maximale Lösung des mean curvature flow. Dann ist $\Gamma(t)$ strikt konvex für $t \in (0,T)$. Mit $t \nearrow T$ konvergiert $\Gamma(t)$ gegen einen Punkt und wird asymptotisch rund.*

4.3 Andere geometrische Flüsse

Nach D. Bernoulli ist die elastische Energie einer ebenen Kurve das Integral

$$E(\gamma) = \frac{1}{2} \int_I \varkappa^2 \, ds \qquad \text{für } \gamma : I \to \mathbb{R}^2. \tag{4.6}$$

Die zugehörigen Lösungen der Euler-Lagrange Gleichung, unter der Nebenbedingung vorgeschriebener Länge, heißen *Elasticae*. Euler hat diese Kurven mit elliptischen Funktionen berechnet; geschlossene Elasticae sind nur der Kreis, die Lemniskate und mehrfache Durchläufe dieser Kurven. Der Gradientenfluss für die Benoullienergie ist eine geometrische Wärmeleitungsgleichung vierter Ordnung.

Satz 4.5. *Für geschlossene, reguläre Anfangskurven hat der Gradientenfluss für die Bernoulli-Energie eine globale Lösung $f : \mathbb{S}^1 \times [0,\infty) \to \mathbb{R}^2$. Mit $t \nearrow \infty$ konvergieren die Kurven (nach Translation) gegen eine Elastica.*

Das Pendant zur Bernoulli-Energie ist für Flächen $f : \Sigma \to \mathbb{R}^3$ die Willmore-Energie

$$\mathcal{W}(f) = \frac{1}{4} \int_\Sigma H^2 \, dA. \tag{4.7}$$

Hier ist Σ ein zweidimensionales Parametergebiet. Bei der gewählten Skalierung ist $\mathcal{W}(\mathbb{S}^2) = 4\pi$; tatsächlich minimiert die runde Sphäre die Willmoreenergie unter allen geschlossenen Flächen. Eine lange offene Vermutung besagte, dass der Kreistorus

$$T = \{(r\cos\varphi, r\sin\varphi, z) \in \mathbb{R}^3 : (r - \sqrt{2})^2 + z^2 = 1\}$$

das Minimum unter allen Tori liefert; es gilt $\mathcal{W}(T) = 2\pi^2$. Diese Vermutung wurde 2012 von Marques und Neves bewiesen. Zum L^2-Gradientenfluss des Willmorefunktionals, kurz Willmore flow, gibt es folgendes Konvergenzresultat.

Satz 4.6. *Sei $f : \mathbb{S}^2 \to \mathbb{R}^3$ eine Anfangs-Fläche mit Willmorenergie $\mathcal{W}(f) \leq 8\pi$. Dann existiert der Willmorefluss global auf $\mathbb{S}^2 \times [0, \infty)$ und konvergiert mit $t \nearrow \infty$ gegen eine runde Sphäre, mit Energie 4π.*

Ein topologisches Resultat aus den 60^{er} Jahren besagt, dass die Sphäre durch eine Schar von regulären Flächen von innen nach außen gestülpt werden kann. Eine Einfärbung innen rot, außen blau würde dabei umgedreht. Die Flächen unterwegs müssen Selbstdurchdringungen haben und kompliziert sein, so dass die maximale auftretende Willmorenergie auf jedem solchen Weg hoch sein sollte. Man kann das vergleichen mit einem Weg von einem Tal ins andere, wo jeder Weg auch eine gewisse Höhe überschreiten muss, nämlich die Passhöhe. Die Frage ist: was ist die Passhöhe in unserm Fall, also was ist die minimale maximale Willmore Energie von all solchen Eversionen? Man kann zeigen, dass jede Eversion eine Fläche mit einem Vierfachpunkt enthalten muss. Eine Ungleichung von Li und Yau besagt, dass diese Fläche mindestens Energie 16π hat; das ist dann eine untere Abschätzung für die maximale Energie jeder Eversion. Die Vermutung ist, dass es eine Eversion mit maximaler Energie 16π gibt. Dies könnte mit dem Willmore flow gezeigt werden, wenn das Konvergenzresultat auf Energie 16π statt 8π verbessert werden könnte.

Der berühmteste geometrische Fluss ist ohne Frage der Riccifluss. Diese Gleichung ist 1982 von R. Hamilton eingeführt worden, um die Geometrie von Mannigfaltigkeiten zu studieren. Die Gleichung lautet

$$\partial_t g = -2\mathrm{Ric}(g(t)). \tag{4.8}$$

Hier ist $g(t)$ eine Riemannsche Metrik auf einer differenzierbaren Mannigfaltigkeit M, und Ric(g(t) ist die Riccikrümmung. Der Fluss deformiert also nicht Flächen in einem umgebenden Raum, sondern Metriken auf einer abstrakten Mannigfaltigkeit; das Konzept der Krümmung geht dabei auf Riemann zurück.

Im Unterschied zu den anderen betrachteten Gleichungen ist der Riccifluss nicht L^2-Gradientenfluss eines Funktionals. Trotz dieser Unterschiede weist der Fluss erhebliche Ähnlichkeiten zum mittleren Krümmungsfluss auf. Zum Beispiel gibt es folgendes Resultat von Hamilton, an dem sich Satz 4.4 zum Teil orientiert hat.

Satz 4.7 (Hamilton). *Sei M eine kompakte zusammenhängende 3-Mannigfaltigkeit, und g_0 sei Riemannsche Metrik auf M mit positiver Riccikrümmung. Dann hat der Riccifluss maximale Existenzzeit $T < \infty$. Mit $t \nearrow T$ geht der Durchmesser gegen Null, und Reskalierung liefert auf M eine Metrik mit konstanter, positiver Krümmung.*

Der Riccifluss war das zentrale Instrument zum Studium von 3-Mannigfaltigkeiten von G. Perelman, aber das ist eine Liga in der wir nicht mitspielen können.

Literatur

[1] Angenent, S., *Examples to curve shortening flow*, http://www.youtube.com/watch?v=wHfpacPLHIA.

[2] Euler, L., *De Curvis Elasticis*, Addidamentum I zu *Methodus Inveniendi Lineas Curvas Maximi Minimive Proprietate Gaudentes*, Lausanne, Geneva 1744.

[3] Garcke, H., *Curvature driven interface evolution*, Jahresberichte DMV **115** (2013), 63–100.

[4] Sullivan, J., Francis, G., Levy, S., *The Optiverse*, http://www.youtube.com/watch?v=cdMLLmlS4Dc.

[5] Morgan, J.W., *Recent progress on the Poincaré conjecture and the classification of* 3*-manifolds*, Bull. Amer. Math. Soc. **42** (2005), 57–78.