Der Tilt von überkonvergenten Potenzreihen

Nikolai Diekert

12. November 2013

Inhaltsverzeichnis

Notationen

- Alle Ringe in dieser Arbeit sind kommutativ und mit Eins. Ringhomomorphismen $R \to S$ bilden 1 auf 1 ab.

- Für einen Ring A bezeichnen wir mit $A^\times$ die multiplikative Untergruppe von A.

- Ist A ein Ring und $x \in A$ ein Element, so bezeichnen wir mit $(x) = xA$ das von x erzeugte Hauptideal. Wir schreiben $A/x = A/(x) = A/xA$ für den Quotientenring. Analog schreiben wir für A-Moduln M und $x \in A$ auch $M/x = M/xM$.

- Ist ein Ring A und ein Ideal I gegeben und $x \in A$. Dann schreiben wir $\bar{x} \in A/I$ für das Bild von x unter der kanonischen Projektion $A \to A/I$.

- Wir verzichten in dieser Arbeit weitesgehend auf Bruchdarstellung und schreiben x/y für $\frac{x}{y}$.

- Wir bezeichnen mit $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \ldots\}$ die natürlichen Zahlen und analog mit $\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$ die ganzen bzw. rationalen bzw. reellen Zahlen.

- In dieser Arbeit bezeichne K, wenn nicht anders erwähnt, stets einen Körper.

- Weiterhin bezeichnen wir mit $\mathbb{R}_{\geq 0} = \{\, x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0 \,\}$ die nicht-negativen reellen Zahlen und analog $\mathbb{R}_{\geq 1}$ und $\mathbb{R}_{>1}$ die reellen Zahlen größer gleich 1 bzw. größer 1.

- In der gesamten Arbeit sei $p \in \mathbb{Z}$ stets eine fest gewählte Primzahl. Für einen Ring A fassen wir p via $\mathbb{Z} \to A$ auch als Element von A auf.

- Für Verknüpfungen von Morphismen $f : A \to B$ und $g : B \to C$ schreiben wir manchmal $gf : A \to C$ anstatt $g \circ f : A \to C$.

- Wir bezeichnen für metrische Räume M die Vervollständigung mit $\widehat{M}$.

- Die Arbeit ist in Kapitel und die Kapitel in Abschnitte unterteilt. Die Nummerierung von Sätzen, Lemmata usw. ist in jedem Abschnitt fortlaufend.

1 Einleitung

Das Ziel dieser Arbeit ist es, Ringe von überkonvergenten Potenzreihen zu konstruieren und zu überprüfen, ob diese eine perfektoide K-Algebra bilden.

Die klassische rigide Analysis hat als Grundbausteine einen nicht-archimedisch bewerteten Körper K und die Potenzreihen, die auf der Einheitskreisscheibe mit Rand konvergieren. Man nennt diese die *strikt konvergenten Potenzreihen* und schreibt

$$T_n(K) = \left\{ \sum_{\nu \in \mathbb{N}^n} c_\nu X^\nu \in K[[X]] \;\middle|\; |c_\nu| \to 0 \text{ für } |\nu| \to \infty \right\}$$

Dieses Objekt wird auch *Tate-Algebra* genannt. Tate war mit [Tat71] Begründer der Theorie der nicht-archimedischen Analysis. Schließlich erhält man affinoide K-Algebren als Quotienten von Tate-Algebren. Die Theorie wird in dem Buch *Non-Archimedean Analysis* von Bosch, Güntzer und Remmert [BGR84] ausführlich besprochen. Man konstruiert weiterhin die Kategorie der affinoiden Varietäten analog zur algebraischen Varietäten, indem man die Spektren der maximalen Ideale mit Zariski-Topologie betrachtet ([BGR84, Chapter 7]).

Indes verhalten sich die strikt konvergenten Potenzreihen bezüglich formaler Integration schlecht: Für die p-adischen Zahlen $K = \mathbb{Q}_p$ konvergiert die Potenzreihe

$$\sum_n p^n X^{p^n - 1}$$

auf der Einheitskreisscheibe mit Rand. Ihre formale Stammfunktion

$$\sum_n X^{p^n}$$

hingegen konvergiert auf dem Rand nicht. Dies führt zu Problemen bei der Betrachtung von Kohomologie, so ist zum Beispiel die erste Kohomologie-Gruppe der deRham-Kohomologie von T_1 unendlich-dimensional [GK99]. Große-Klönne führt daher Dagger-Algebren ein. Für diese nimmt man den Ring der überkonvergenten Potenzeihen, nach der Arbeit von Monsky und Washnitzer [MW68] auch *Waschnitzer-Algebren* genannt. Diese ist die Vereinigung aller Potenzreihen, die auf einem Kreisscheibe vom Radius $\rho > 1$ konvergieren.

$$W = \bigcup_{\rho > 1} T_n(K)_\rho$$

Dagger-Algebren sind nun Quotienten W/I der Washnitzer-Algebra. Große-Klönne untersucht in seiner Arbeit *Rigid analytic spaces with overconvergent structure sheaf* [GK00] diese Dagger-Algebren. Er zeigt, dass sich die Probleme von Räumen mit Rand dadurch umgehen lassen. Zum Beispiel ist in vielen Fällen die deRham-Kohomologie endlich-dimensional.

Auf der anderen Seite sind viele Probleme, die in gemischer Charakteristik Schwierigkeiten bereiten, in positiver Charakteristik bekannt. So zum Beispiel die Weight-Monodromy-Vermutung von Deligne, die für lokale Körper von Charakteristik p gezeigt wurde [Del71, Ter98]. Peter Scholze gelingt es in seiner Arbeit *Perfectoid Spaces* [Sch12b] in bestimmten Fällen diese auch in gemischter Charakteristik zu zeigen.
Ausgangspunkt dabei ist eine Konstruktion von Fontaine und Wintenberger [FW79]: Grob gesagt erhält man aus einem vollständig bewerteter Körper K, dessen Restklassenkörper von Charakteristik p ist, via

$$K^\flat = \lim_{x \mapsto x^p} K$$

einen vollständig bewerteten Körper von Charakteristik p (für Details zu den Voraussetzungen, siehe [FW79]). Scholze verallgemeinert diese Konstruktion für perfektoide K-Algebren. Dann zeigt er, dass die Kategorie perfektoider K-Algebren und die Kategorie perfektoider $K^\flat$-Algebren äquivalent sind. Diese Äquivalenz, die konkret angegeben werden kann, nutzt Scholze zusammen mit Hubers Räumen stetiger Funktionen [Hub93] um Probleme in gemischter Charakteristik in Probleme in positiver Charakteristik zu übersetzen.

Man kann nun analog zu Große-Klönne für einen perfektoiden Körper K den Ring der überkonvergenten Potenzreihen

$$W = \bigcup_{\rho > 1} K\langle X^{1/p^\infty} \rangle_\rho$$

konstruieren. Die initiale Fragestellung dieser Arbeit war, ob dieser Ring eine perfektoide K-Algebra ist. Gegebenenfalls könnte man dann nämlich Scholzes Theorie der perfektoiden Räume mit den Vorteilen der Dagger-Algebren bereichern. Es stellt sich heraus, dass W keine perfektoide K-Algebra ist, da sie nicht vollständig ist. Aber W ist eine Vereinigung perfektoider K-Algebren, die man zu perfektoiden $K^\flat$-Algebren machen und dann wieder zusammensetzen kann.

Die Arbeit gliedert sich in drei Teile. Der erste Teil (Kapitel 2 und 3) ist eine ausführliche Darstellung der benötigten Grundlagen. Der zweite Teil (Kapitel 4) ist eine Ausarbeitung zu perfektoiden K-Algebren und im dritten Teil (Kapitel 5) schließlich werden die überkonvergenten Potenzreihen konstruiert und auf ihre Eigenschaften hin untersucht.

Im zweiten Kapitel definieren wir nicht-archimedische Halbnormen auf Ringen, erklären die davon induzierte Topologie und gehen auf Vervollständigungen ein. Bezüglich der Definitionen halten wir uns an [BGR84]. Wir untersuchen insbesondere normierte K-Algebren R und stellen einige Resultate vor, die wir später benötigen. Ein Augenmerk liegt dabei auf der Menge R^o der potenzbeschränkten Elemente: Ein Element $x \in R$ heißt potenzbeschränkt, wenn die Menge $\{ x^n \mid n \in \mathbb{N} \}$ in R beschränkt ist. Für Beschränktheit gibt es zum einen eine rein topologische Definition, zum anderen gibt es metrische

Beschränktheit. Scholze präzisiert nicht, welche der Definitionen er verwendet. Wir zeigen, dass in dem Fall bewerteter K-Algebren beide Definitionen äquivalent sind.
Im Ganzen legen wir alle topologischen Grundlagen für die späteren Kapitel. Viele der Resultate sind für diskrete Bewertungen sehr gut bekannt. Ein Anliegen dieses ersten Kapitels ist es, zu zeigen, dass man sie direkt auf nicht-diskrete Bewertungen übertragen kann.

Im dritten Kapitel führen wir in die Almost Ring Theory ein. Grundbaustein ist ein Ring V mit einem Ideal $\mathfrak{m} \subset V$, für das $\mathfrak{m} = \mathfrak{m}^2$ gilt. Ein V-Modul M_0 heißt dann *fast-null*, wenn $\mathfrak{m}M = 0$ gilt. Entsprechend sind zwei V-Moduln M und N *fast-isomorph*, wenn es einen Morphismus $M \to N$ gibt, dessen Kern und Cokern fast-null sind. Die Almost Ring Theory geht auf Faltings zurück [Fal88] und Gabber und Ramero haben diese in ihrem Buch *Almost Ring Theory* [GR03] systematisch dargestellt. Trotzdem haben wir bemerkt, dass viele ihrer Beweise für im Gebiet nicht bewanderte Leser sich eher als Anleitung für einen zu führenden Beweis lesen. Ein Anliegen des dritten Kapitels ist es, die vorgestellten Konstruktionen und Sätze in großer Ausführlichkeit zu behandeln. Wir werden weiter unten die Idee der Almost Theory am Beispiel der perfektoiden K-Algebren vorstellen.

Die perfektoiden K-Algebren werden im vierten Kapitel eingeführt. Ein Körper K heißt dabei perfektoid, wenn er nicht-diskret und vollständig bewertet ist, sein Restklassenkörper $K^o/\mathfrak{m}$ von Charakteristik p ist, und der Ring K^o/p perfekt ist.
Einen solchen perfektoiden Körper kann man „umwerfen“ (*tilten*): Scholze definiert $K^\flat$ als Quotientenkörper von

$$\varprojlim_{\Phi} K^o/\varpi,$$

wobei Φ die Frobeniusabbildung ist und ϖ ein Element aus $K^\times$ mit $|p| \leq |\varpi| < 1$. Man kann außerdem ohne Einschränkung annehmen, dass $\varpi^{1/p^n} \in K^o$ für alle $n \in \mathbb{N}$ existiert. Perfektoide K-Algebren sind vollständige K-Algebren R, sodass der Ring der potenzbeschränkten Elemente R^o in R beschränkt ist und $R^o/\ \varpi$ perfekt ist. Die Kategorie der perfektoiden K-Algebren wird mit K-**Perf** bezeichnet. Man kann perfektoide K-Algebren R tilten und erhält perfektoide $K^\flat$-Algebren $R^\flat$. Insbesonder gilt multiplikativ

$$R \cong \varprojlim_{x \mapsto x^p} R.$$

Es stellt sich heraus, dass der Tilt-Funktor eine Äquivalenz von Kategorien ist. Scholzes Idee war es nun, diese Aussage mit Methoden der Almost Ring Theory in voller Allgemeinheit zu zeigen. Wir können im vierten Kapitel nur einen Teil seines Beweises vorstellen, wollen hier aber die Grundidee skizzieren.

Bei nicht-diskret bewerteten Körpern K gilt für das maximale Ideal $\mathfrak{m} \subset K^o$

$$\mathfrak{m} = \mathfrak{m}^2.$$

Ein K^o-Modul M ist also fast-null, wenn Multiplikation für alle $c \in K, |c| < 1$

$$cM = 0$$

liefert. Wir können etwas ungenau sagen, eine Aussage gilt *fast*, wenn man sie beliebig kleiner skalieren kann und sie dann gilt.
Indem man an den Fast-Isomorphismen lokalisiert, erhält man aus der Kategorie der K^o-Moduln eine Kategorie, der K^o-fast Moduln, die auch mit K^{oa}-**Mod** bezeichnet wird. Das „a" steht dabei für das englische „almost". Morphismen von A nach B sind in dieser Kategorie durch $\mathrm{Hom}_{K^o}(\mathfrak{m} \otimes A, B)$ gegeben. Man definiert damit eine Kategorie der perfektoiden K^o fast-Algebren K^{oa}-**Perf**. In dieser induziert die Frobeniusabbildung einen Isomorphismus

$$A/\varpi^{1/p} \cong A/\varpi.$$

Die Äquivalenz K-**Perf** $\cong K^{oa}$-**Perf** erklärt sich nun dadurch, dass Skalieren in einer K-Algebra invertierbar ist. Also: „eine Aussage ist wahr, genau dann wenn sie fast wahr ist".
Man führt nun eine Kategorie von perfektoiden K^{oa}/ϖ-Algebren K^{oa}/ϖ-**Perf** ein, in der Frobenius einen Isomorphismus $\overline{A}/\varpi^{1/p} \cong \overline{A}$ induziert. Der Beweis der Äquivalenz

$$K^{oa}\text{-}\mathbf{Perf} \cong K^{oa}/\varpi\text{-}\mathbf{Perf}$$

setzt die Theorie von Kotangentkomplexen im Almost setting voraus. Die Äquivalenz ist durch $A \mapsto A/\varpi$ gegeben.
Eine K^{oa}/ϖ-Algebra $\overline{A}$ wird induktiv zu flachen K^{oa}/ϖ^n-Algebren $\overline{A}_n$ geliftet, für die $\overline{A}_n/\varpi^{n-1} \cong \overline{A}_{n-1}$ gilt. Dann erhält man durch $A = \varprojlim \overline{A}$ eine ϖ-adisch vollständige, flache K^{oa}-Algebra, und es gilt $\overline{A} \cong A/\varpi$. Daraus folgt dann die Äquivalenz der Kategorien.
Die Schwierigkeit besteht dabei im Liften von $\overline{A}$ zu $\overline{A}_n$. Folgende Skizze soll veranschaulichen, was im Almost Setting passiert. Ist ein Morphismus $\bar{f} : A/\varpi \to B/\varpi$ gegeben und soll zu $f : A/\varpi^2 \to B\varpi^2$ geliftet werden, so geht die nur bis auf ϖ-Torsion. Da Frobenius in K^{oa}-**Perf** einen Isomorphismus $A/\varpi^{1/p} \cong A/\ \varpi$ induziert, ist das Liften induktiv bis auf ϖ^{1/p^n}-Torsion möglich. Also ist es bis auf $\mathfrak{m}$-Torsion möglich, was im Almost Setting aber gerade heißt, dass es möglich ist.

Im fünften Kapitel geben wir eine Konstruktion von Potenzreihen mit p^m-ten Wurzeln an. Wir definieren die ρ-Supremumsnorm auf diesen Objekten, die eine Bewertung ist. Scholze zeigt, dass die Potenzreihen $K\langle X^{1/p^\infty}\rangle_1$, die auf der Einheitskreisscheibe konvergieren, eine perfektoide K-Algebra bilden (in Scholzes Arbeit dienen diese Ringe dann auch zur Definition von perfektoiden Räumen [Sch12b, Section 6]). Wir zeigen, dass diese Aussage für $K\langle X^{1/p^\infty}\rangle_\rho$ durch Umskalierung auf größere Radien ρ erweitert werden kann. Es ist zu beachten, dass die Objekte keine Teilmenge von

$$K[[X^{1/p^\infty}]]$$

sind, da dort keine Vollständigkeit gegeben ist (in Analogie zu dem Fall, dass $\mathbb{Q}_p(p^{1/p^\infty})$ nicht vollständig ist).

Schließlich können die einzelnen $K\langle X^{1/p^\infty}\rangle_\rho$ für $\rho > 1$ über den direkten Limes zu dem Ring

$$W = \varinjlim_{\rho>1} K\langle X^{1/p^\infty}\rangle_\rho$$

der überkonvergenten Potenzreihen zusammengesetzt werden. Wir zeigen, dass der direkte Limes tatsächlich eine Vereinigung ist, die in $K\langle X^{1/p^\infty}\rangle_1$ eingebettet werden kann. Versehen mit der 1-Supremumsnorm ist W aber nicht vollständig.

In einem Anhang (Kapitel 6) führen wir einige Rechnungen, die wir Hauptteil aus Gründen der Lesbarkeit weggelassen haben. Unter anderem ist dort der Beweis für die Charakterisierung von Fast-Isomorphismen gegeben, der in [GR03] nicht geführt wird.

2 Nicht-archimedische Halbnormen und Topologie

Von dem gewöhnlichen Absolutbetrag $|\cdot|_\infty$ auf $\mathbb{R}$ kennen wir die Dreiecksungleichung

$$|a+b|_\infty \le |a|_\infty + |b|_\infty.$$

Es gibt Beträge auf Ringen, für die eine verschärfte Dreiecksungleichung gilt:

$$|a+b| \le \max(|a|, |b|).$$

Induktiv folgt dann für alle natürlichen Zahlen $n \in \mathbb{N}$, dass

$$|n| = |\underbrace{1 + \cdots + 1}_{n}| \le \max(|1|, \ldots, |1|) = |1|;$$

die natürlichen Zahlen sind im Betrag also beschränkt. Daher nennt man solche Beträge *nicht-archimedisch*. In der gesamten Arbeit werden wir uns in der nicht-archimedischen Welt befinden. Aus Gründen der Lesbarkeit werden wir das Adjektiv „nicht-archimedisch“ ab sofort überall weglassen.

In Abschnitt 2.1 klären wir die Begriffe von *Halbnorm*, *Norm* und *Betrag* auf einem Ring.
Jede Halbnorm auf einem Ring A induziert, analog zu dem gewöhnlichen Absolutbetrag $|\cdot|_\infty$ auf $\mathbb{R}$, eine Pseudometrik und damit eine Topologie auf A. Wir untersuchen dies näher in Abschnitt 2.2 und untersuchen die Begriffe *Beschränktheit* und *Potenzbeschränktheit* für Ringe mit Halbnorm.
Ringe mit Halbnorm $(A, |\cdot|)$ lassen sich, analog zu der Vervollständigung von $\mathbb{Q}$ zu $\mathbb{R}$, ebenfalls zu einem Ring mit Norm $(\widehat{A}, |\cdot|')$ vervollständigen. Die Besonderheit ist, dass wegen der verschärften Dreiecksungleichung eine Folge $(x_n)_n$ schon dann Cauchy-Folge ist, wenn

$$|x_{n+1} - x_n| \to 0 \quad \text{für } n \to \infty.$$

Wir behandeln Vervollständigungen in Abschnitt 2.3.
In Abschnitt 2.4 sammeln wir Eigenschaften von *bewerteten Körpern* und geben Beispiele, auf denen wir in Kapitel 4 aufbauen.
Ebenfalls in jenem Kapitel benutzen wir projektive und direkte Limites topologischer Ringe, die wir in Abschnitt 2.5 behandeln.

Die hauptsächliche Quelle für dieses Kapitel, mit Ausnahme der Diskussion zur Beschränktheit und Potenzbeschränktheit, sowie Abschnitt 2.5, ist das ausführliche Buch *Non-Archimedean Analysis* von Bosch, Günter und Remmert [BGR84]. Die Aussagen zur Potenzbeschränktheit und Beschränktheit sind Tatsachen, die Scholze in *Perfectoid Spaces* [Sch12b] ohne weitere Erwähnung verwendet. Wir haben sie in dieser Arbeit deshalb (ggf. in verallgemeinerter Form) formuliert und bewiesen.

2.1 Definitionen

Wir beginnen mit der

Definition 2.1.1 ([BGR84, 1.1.1 Definition 1, 1.2.1 Definition 1])**.** Sei A ein Ring und $|\cdot| : A \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ eine Abbildung. Das Paar $(A, |\cdot|)$ heißt *Ring mit Halbnorm*, wenn gilt:

(i) $|0| = 0$,

(ii) $|x - y| \leq \max(|x|, |y|)$ für alle $x, y \in A$ (*verschärfte Dreiecksungleichung*),

(iii) $|xy| \leq |x||y|$ für alle $x, y \in A$ und

(iv) $|1| \leq 1$.

Wir nennen $|A| = \{\, |a| \;\mid\; a \in A \,\} \subset \mathbb{R}$ die *Menge der Beträge* von A. Mit $\ker(|\cdot|) = \{\, x \in A \;\mid\; |x| = 0 \,\}$ bezeichnen wir den *Kern der Halbnorm* $|\cdot|$. Ist $\ker(|\cdot|) = \{0\}$ so heißt die Halbnorm eine *Norm* und wir sagen, A ist ein Ring mit Norm oder A ist ein *normierter Ring*.

Aus $|1| = |1^2| \leq |1|^2$ folgt wegen (iv) bereits $|1| \;= 0$ oder $|1| = 1$. Im ersten Fall ist dann $|A| = \{0\}$. Dies ist ein Beispiel für eine Halbnorm.
Üblicherweise wird die verschärfte Dreiecksungleichung als $|x+y| \leq \max(|x|, |y|)$ angegeben; um dann $|-x| = |x|$ zu erhalten, muss man aber noch $|-1| = 1$ fordern. Die übliche verschärfte Dreiecksungleichung und $|-x| = |x|$ ergibt sich aus der obigen Definition; wir fassen diese und andere Eigenschaften zusammen:

Satz 2.1.2. *Sei $(A, |\cdot|)$ ein Ring mit Halbnorm. Dann gilt für alle $x, y, x_1, \ldots, x_n \in A$:*

(a) $|-y| = |y|$,

(b) $|x + y| \leq \max(|x|, |y|)$,

(c) $|\sum_{\nu=1}^{n} x_\nu| \leq \max_{1 \leq \nu \leq n}\{|x_\nu|\}$,

(d) $|x + y| = \max(|x|, |y|)$, *wenn* $|x| \neq |y|$,

(e) $|\sum_{\nu=1}^{n} x_\nu| = |x_1|$, *wenn* $|x_1| > |x_\nu|$ *für alle* $\nu > 1$, *und*

(f) ist $\sum_{\nu=1}^{n} x_\nu = 0$ *mit* $n \geq 2$,
dann gibt es $i, j \in \{1, \ldots, n\}$ *mit* $|x_i| = |x_j| = \max_{1 \leq \nu \leq n}\{|x_\nu|\}$.

Beweis. Aussagen (a), (b) und (d) sind [BGR84, 1.1.1 Proposition 3]; Aussage (c) folgt mit Induktion sofort aus (b); Aussage (e) ist [BGR84, 1.1.1 Proposition 4] und Aussage (f) ist [BGR84, 1.1.1 Corollary 5]. □

Fordert man statt $|xy| \leq |x||y|$ Gleichheit, dann erhält man den Begriff einer Bewertung.

Definition 2.1.3 ([BGR84, 1.5.1 Definition 1])**.** Sei $(A, |\cdot|)$ ein normierter Ring. Gilt für alle $x, y \in A$ bereits $|xy| = |x||y|$, dann heißt die Norm $|\cdot| : A \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ eine *Bewertung* und wir nennen A einen *bewerteten Ring.*

Ein Ring mit Bewertung ist stets nullteilerfrei: Aus $xy = 0$ folgt nämlich $|x||y| = |xy| = 0$. Da eine Bewertung eine Norm ist, gilt $x = 0$ oder $y = 0$.

Bemerkung 2.1.4. Bei Huber [Hub93, S. 461] und Scholze [Sch12b, Definition 2.2, Remark 2.3] ist eine Bewertung eine multiplikative Abbildung $|\cdot| : A \to \Gamma \cup \{0\}$ mit verschärfter Dreiecksungleichung, wobei Γ eine total geordnete Gruppe ist ([Bou64, chap. 6, §3, Définition 1]). Diese Abbildung hat nicht notwendigerweise einen trivialen „Kern“. Wir betrachten in dieser Arbeit nur solche Bewertungen von Rang 1 [Sch12b, Definition 3.1] und dann können wir ohne Einschränkung $\Gamma \cup \{0\} = \mathbb{R}_{\geq 0}$ annehmen [Bou64, chap 6, §4, Proposition 8]. Weiterhin ist der Kern einer Bewertung im Sinne von [Sch12b] stets ein Primideal [Bou64, chap 6, §3 №1, Remarque 2], sodass für Körper eine Bewertung von Rang 1 im Sinne von [Sch12b] eine Bewertung im Sinne von Definition 2.1.3 ist.
Da wir uns in dieser Arbeit nicht weiter mit dem Raum der stetigen Bewertungen ([Hub93], [Sch12b, Section 2]) beschäftigen, halten wir an der Definition 2.1.3 fest.

Wir führen einige Beispiele von (Halb-)Normen auf Ringen an:

Beispiel 2.1.5. Sei A ein Ring, $\alpha > 1$ eine reelle Zahl. Dann definiert die Abbildung $|\cdot| : A[X] \to \mathbb{R}_{\geq 0}; f \mapsto \alpha^{\deg(f)}$ eine Norm auf dem Polynomring $A[X]$ [BGR84, 1.3.3 Example (a)]. Dabei setzt man $|0| = \alpha^{-\infty} = 0$.
Hat A Nullteiler, so ist dies keine Bewertung: Für Nullteiler $a, b \in A$ gilt $0 = |0| = |ab| < |a||b| = 1$.
Ist A hingegen nullteilerfrei, so ist $(A[X], \alpha^{\deg})$ ein bewerteter Ring. Vergleiche dazu [BGR84, 1.5.2 Proposition 1].

Beispiel 2.1.6. Sei A ein Ring mit Primideal $\mathfrak{p}$. Setze für $x \in A$

$$|x| = \begin{cases} 1, & \text{wenn } x \notin \mathfrak{p} \\ 0, & \text{wenn } x \in \mathfrak{p} \end{cases}.$$

Dann ist dies eine Halbnorm auf A mit Kern $\ker(|\cdot|) = \mathfrak{p}$. Außerdem ist diese *multiplikativ*, d.h. für alle $x \notin \ker(|\cdot|)$ und alle $y \in A$ gilt $|xy| = |x||y|$.

Das folgende Beispiel gehört zu den bekanntesten Beispielen einer nicht-archimedischen Bewertung. Es wird uns oft als Anschauung und Grundlage für weitere Beispiele dienen.

Beispiel 2.1.7. Sei p eine Primzahl, dann setzen wir für $z \in \mathbb{Z}$

$$|z|_p = \begin{cases} p^{-m}, & \text{wenn } z \neq 0 \text{ und } z = p^m u \text{ mit } p \nmid u \\ 0, & \text{wenn } z = 0 \end{cases}$$

Die Abbildung $|\cdot|_p : \mathbb{Z} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ heißt *p-adische Bewertung* und ist eine Bewertung auf dem Ring der ganzen Zahlen $\mathbb{Z}$.

Beispiel 2.1.8. Die p-adische Bewertung lässt sich auf $\mathbb{Q}$ fortsetzen, indem man $|a/b|_p = |a|_p|b|_p^{-1}$ setzt. Eine einfache Rechnung zeigt, dass man Bewertungen auf Ringen stets auf diese Art auf ihren Quotientenkörper fortsetzen kann.

Beispiel 2.1.9. Betrachte für einen Ring A den Potenzreihenring $A[[X]]$ und setze für ein Element $f \in A[[X]]$

$$v(f) = \sup \{ n \in \mathbb{N} \mid f \in (X)^n \} .$$

Dann ist für ein $\alpha > 1$ ist die Abbildung $f \mapsto \alpha^{-v(f)}$ eine Norm.

Sei $(A, |\cdot|)$ ein normierter Ring, dann führen wir den Begriff einer *normierten A-Algebra* ein. Diese ist ein Spezialfall von normierten A-Moduln, welche in [BGR84, Chapter 2] behandelt werden.

Definition 2.1.10 ([BGR84, 3.1.1 Definition 1])**.** Sei $(A, |\cdot|_A)$ ein normierter Ring. Sei B eine A-Algebra und $|\cdot|_B : B \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ eine Norm auf B.
Dann heißt $(B, |\cdot|_B)$ eine *normierte $(A, |\cdot|_A)$-Algebra*, wenn

$$|ab|_B \leq |a|_A|b|_B \text{ für alle } a \in A, b \in B \text{ gilt.}$$

Wir sagen auch, *B ist eine normierte A-Algebra*, und schreiben die Normen nicht explizit hin.
Eine normierte A-Algebra B heißt *treu* oder *treu normierte A-Algebra*, wenn $|ab| = |a||b|$ für alle $a \in A, b \in B$ gilt.

Beispiel 2.1.11. Ein normierter Ring A ist auf kanonische Weise eine normierte A-Algebra. Eine Norm auf einem Ring ist also genau dann eine Bewertung, wenn A als A-Algebra treu normiert ist.

Wir werden in Abschnitt 2.4 sehen, dass in den von uns betrachteten Fällen Torsionsfreiheit und Flachheit für A-Algebren das gleiche sind. Deshalb folgende zwei Lemmata. Der Beweis des ersten steht nicht in [BGR84].

Lemma 2.1.12 ([BGR84, 2.1.1 Lemma 2])**.** *Sei A ein normierter Ring. Dann ist eine treu normierte A-Algebra B torsionsfrei über A.*

Beweis. Sei $ab = 0$ für $a \in A - \{0\}$ und $b \in B$. Dann gilt $0 = |ab| = |a||b|$. Wegen $a \neq 0$ gilt $|a| \neq 0$ und damit ist $|b| = 0$. Daraus folgt wiederum $b = 0$. □

Lemma 2.1.13 ([BGR84, 2.1.1 Proposition 4])**.** *Sei A ein Ring mit Bewertung. Ist A ein Körper, so ist jede normierte A-Algebra B treu normiert.*

Beweis. Siehe [BGR84, 2.1.1 Proposition 4]. □

Wir geben an dieser Stelle ein Beispiel für eine normierte A-Algebra an, welches wir in Kapitel 5 ausführlich vorstellen und einführen.

Beispiel 2.1.14. Sei $(A, |\cdot|)$ ein normierter Ring und $\rho \geq 1$ eine reelle Zahl, dann setzen wir für $f = \sum_{\nu=0}^{n} a_\nu X^\nu \in A[X]$

$$|f|_\rho = \max_{0 \leq \nu \leq n} \{|a_\nu|\rho^\nu\}.$$

Behauptung: Damit ist $A[X]$ eine normierte A-Algebra. Wir nennen $|\cdot|_\rho : A[X] \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ auch *ρ-Supremumsnorm*. Wir beweisen diese Behauptung in Abschnitt 5.1.

2.2 Topologie und Potenzbeschränktheit

Eine Halbnorm auf einem Ring A induziert eine *Pseudometrik* auf A, die wiederum eine Topologie induziert. Dabei ist eine Pseudometrik eine Abbildung $d : A \times A \to \mathbb{R}_{\geq 0}$, die die Axiome einer Metrik, bis auf $d(x, y) = 0 \Rightarrow x = y$, erfüllt.

Sei $(A, |\cdot|)$ ein Ring mit Halbnorm. Für $x \in A$ und $\varepsilon > 0$ bezeichnen wir mit

$$B(x; \varepsilon) = \{\, y \in A \;\mid\; |x - y| < \varepsilon \,\}$$

den *offenen Ball* um x mit Radius ε.
Wir nennen eine Menge $U \subset A$ *offen*, wenn es für alle $x \in U$ ein $\varepsilon > 0$ gibt, sodass $B(x; \varepsilon) \subset U$.
Analog zu dem Fall einer Metrik ist leicht zu zeigen, dass die offenen Mengen eine Topologie für A bilden. Diese ist aber, wie wir sehen werden, im Allgemeinen nicht Hausdorff. Man spricht deshalb von der durch $|\cdot|$ induzierten *pseudometrischen Topologie* [BGR84, S.12].

Satz 2.2.1. *Ein Ring $(A, |\cdot|)$ mit Halbnorm, welcher mit seiner pseudometrischen Topologie versehen ist, wird durch diese Topologie zu einem* topologischen Ring. *Das heißt, die Abbildungen*

$$x \mapsto -x; \quad (x, y) \mapsto x + y; \quad (x, y) \mapsto xy$$

sind stetig.

Beweis. Der Beweis ist analog zu der Aussage für den gewöhnlichen Absolutbetrag $|\cdot|_\infty$ auf $\mathbb{R}$. Dabei liefert die verschärfte Dreiecksungleichung Vereinfachungen. $\square$

Wenn nicht anders erwähnt, betrachten wir ab sofort einen Ring $(A, |\cdot|)$ mit (Halb-)Norm (bzw. Bewertung) stets mit der von der (Halb-)Norm (bzw. Bewertung) $|\cdot|$ induzierten, pseudometrischen Topologie. Wir nennen die Topologie auch *die induzierte Topologie.*

Beispiel 2.2.2. Sei $A = K$ ein Körper. Sei $|\cdot|_t : K \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ die Bewertung, die durch

$$|x|_t = \begin{cases} 1 & \text{wenn } x \in K^\times \\ 0 & \text{für } x = 0 \end{cases}$$

gegeben ist. Dann ist $\{0\} = B(0; 1)$ offen; die induzierte Toplogie ist also die diskrete Topologie. Die Bewertung $|\cdot|_t : K \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ heißt auch *die triviale Bewertung auf K*.
Sei $|\cdot|_2 : K \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ die Bewertung, die durch

$$|x|_k = 0 \text{ für alle } x \in K$$

gegeben ist. Dann ist die induzierte Topologie die Klumpentopologie.

Wir verallgemeinern zwei Begriffe aus [BGR84, 1.5.1 Definition 2].

Definition 2.2.3. Eine Halbnorm $|\cdot|$ auf einem Ring A heißt *nicht-degeneriert*, wenn es ein Element $x \in A$ mit $0 < |x| < 1$ gibt.
Eine Halbnorm auf einem Ring A heißt *nicht-trivial*, wenn es ein Element $x \in A$ mit $|x| \neq 0, 1$ gibt.

Bemerkung 2.2.4.

(a) Wegen $|x^{-1}| = |x|^{-1}$ ist klar, dass eine Bewertung auf einem Körper genau dann nicht-trivial ist, wenn sie nicht-degeneriert ist.

(b) Es gibt nicht-degenerierte Halbnormen, die die diskrete Topologie induzieren; dies ist der Fall, wenn es ein Element $x \in A$ mit $|x| > 0$ und $|x| = \min(|A| - \{0\})$ gibt: Es gilt dann $B(0; |x|) = \{0\}$.

Wir fassen Besonderheiten der induzierten Topologie in einem Satz zusammen. Dazu setzen wir für $x \in A$ und $\varepsilon > 0$

$$\overline{B}(x; \varepsilon) = \{\, y \in A \;\mid\; |x - y| \leq \varepsilon \,\}$$

und nennen dies *den geschlossenen Ball um x mit Radius ε*. Schreiben wir im Folgenden *Ball* so meinen wir offene oder geschlossene Bälle. Wir nennen $x \in A$ *Zentrum* des Balles B, wenn wir $B = B(x; \varepsilon)$ bzw. $B = \overline{B}(x; \varepsilon)$ für ein $\varepsilon > 0$ schreiben können.

Satz 2.2.5. *Sei $(A, |\cdot|)$ ein Ring mit Halbnorm, versehen mit der induzierten Topologie. Dann gelten für $x \in A, \varepsilon > 0$ folgende Aussagen:*

(a) Jeder Punkt eines Balles ist sein Zentrum.

(b) Zwei Bälle sind entweder disjunkt oder einer von beiden ist im anderen enthalten.

(c) Offene Bälle $B(x; \varepsilon)$ sind offen und abgeschlossen.

(d) Geschlossene Bälle $\overline{B}(x; \varepsilon)$ sind offen und abgeschlossen.

(e) Die Sphären $S(x; \varepsilon) = \overline{B}(x; \varepsilon) - B(x; \varepsilon)$ sind offen und abgeschlossen.

(f) Der Raum $(A, |\cdot|)$ ist genau dann hausdorff, wenn $\ker(|\cdot|) = \{0\}$ ist.

(g) Ist der Raum $(A, |\cdot|)$ hausdorff, dann ist er total unzusammenhängend*, das heißt, Zusammenhangskomponenten bestehen aus nur einem Punkt.*

Beweis. Siehe Seite 12 und 13 von [BGR84]. □

Bemerkung 2.2.6. Die folgende Diskussion ist motiviert von [Sch12b, Definition 5.1 (i)]:

„A perfectoid K-algebra is a Banach K-algebra R such that the subset $R^o \subset R$ of powerbounded elements is open and bounded, and the Frobenius morphism $\Phi : R^o/\varpi \to R^o/\varpi$ is surjective. Morphisms between perfectoid K-algebras are the continuous morphisms of K-algebras.“

Die Begriffe *beschränkt* (bounded) und *potenzbeschränkt* (powerbounded) können metrisch oder allgemein für topologische Ringe definiert werden. Wir werden sehen, dass sie in der Situation oben übereinstimmen. Die Teilmenge R^o der potenzbeschränkten Elemente ist in diesem Fall ein offener und abgeschlossener Unterring von R (vergleiche [BGR84, 1.2.5, Proposition 2]) bzw. Satz 2.2.10. Die Forderung, dass R^o offen ist, ist also automatisch erfüllt.
Eine Warnung: in [BGR84] ist $R^o = \{ x \in R \mid |x| \leq 1 \}$ und die Menge der potenzbeschränkten Elemente wird mit $\mathring{R}$ bezeichnet. Es gilt $R^o \subset \mathring{R}$; im Allgemeinen aber nicht Gleichheit. Wir halten uns in diesem Punkt der Lesbarkeit wegen an [Sch12b].

Definition 2.2.7 ([Bou66, chap. 3, Exercise §6, 12)])**.** Sei A ein topologischer Ring. Dann heißt eine Teilmenge $S \subset A$ *topologisch beschränkt*, wenn es für alle offenen Umgebungen U der 0 eine offene Umgebung V der 0 gibt, sodass

$$VS = \{ vs \in A \mid v \in V, s \in S \} \subset U$$

gilt.

Obige Definition ist ebenso wie die folgende Definition 2.2.9 auch bei Huber [Hub93, S. 456] zu finden.
Ist die Menge $\{0\} \subset A$ offen, so ist jede Teilmenge S von A, insbesondere A selbst, beschränkt: Wir können immer $V = \{0\}$ setzen.

Definition 2.2.8. Sei $(A, |\cdot|)$ ein Ring mit Halbnorm und $S \subset A$ eine Teilmenge. Wir nennen S *metrisch beschränkt*, wenn es ein $\varepsilon > 0$ gibt, sodass

$$S \subset B(0; \varepsilon).$$

Definition 2.2.9. Sei A ein topologischer Ring. Dann heißt ein Element $x \in A$ *potenzbeschränkt*, wenn die Menge $\{ x^n \mid n \in \mathbb{N} \}$ topologisch beschränkt ist. Mit

$$A^o = \{ x \in A \mid x \text{ ist potenzbeschränkt} \}$$

bezeichnen wir die *Menge der potenzbeschränkten Elemente.*

Wendet man den Begriff von Potenzbeschränktheit aus [BGR84] an, so erhält man folgende Beobachtung.

Satz 2.2.10. *Sei $(A, |\cdot|)$ ein Ring mit Halbnorm und der Eigenschaft, dass ein Element $x \in A$ genau dann potenzbeschränkt ist, wenn die Menge*

$$\{ x^n \mid n \in \mathbb{N} \}$$

metrisch beschränkt ist. Dann ist die Menge A^o der potenzbeschränkten Elemente ein Unterring von A, der in A offen und abgeschlossen ist.
Weiterhin ist $\overline{B}(0; 1) = \{ x \in A \mid |x| \leq 1 \}$ ein Ideal in A^o.

Beweis. Siehe [BGR84, 1.2.5 Definition 1] und [BGR84, 1.2.5 Proposition 2]. Wir merken dazu an, dass offene Untergruppen topologischer Gruppen stets abgeschlossen sind [AM69, S. 103]. Außerdem sind Untergruppen, die offene Untergruppen enthalten, selbst wieder offen: Ist U offene Untergruppe von V, so ist für alle $v \in V$ auch $v + U \subset V$. □

Lemma 2.2.11. *Sei $m \in \mathbb{N}$. In der Situation von Satz 2.2.10 ist ein Element x genau dann potenzbeschränkt, wenn x^m potenzbeschränkt ist.*

Beweis. Es ist offensichtlich, dass x^m potenzbeschränkt ist, wenn x potenzbeschränkt ist. Sei umgekehrt x^m potenzbeschränkt. Es gibt also nach Voraussetzung ein $\varepsilon > 0$ mit $\{ (x^m)^s \mid s \in \mathbb{N} \} \subset B(0; \varepsilon)$. Dann ergibt sich für $n = sm + r$ mit $r < m$, dass

$$|x^n| = |(x^m)^s \cdot x^r| \leq \varepsilon \cdot \max(|x^0|, |x^1|, \dots, |x^{m-1}|).$$

Die Menge $\{ x^n \mid n \in \mathbb{N} \}$ ist also metrisch beschränkt. □

Wir werden zeigen, dass topologische Beschränktheit und metrische Beschränktheit in wichtigen Fällen übereinstimmen.

Lemma 2.2.12. *Sei $(A, |\cdot|)$ ein Ring mit Halbnorm. Dann sind metrisch beschränkte Mengen $S \subset A$ topologisch beschränkt.*

Beweis. Sei $\varepsilon > 0$ so, dass $S \subset B(0;\varepsilon)$. Sei ohne Einschränkung $U = B(0;\delta)$ eine Umgebung der 0. Setze $V = B(0;\delta/\varepsilon)$, dann gilt für alle $v \in V, s \in S$:

$$|vs| \leq |v||s| < (\delta/\varepsilon)\varepsilon = \delta;$$

also $VS \subset U$. □

Aus dem Lemma folgt sofort, dass auch für Ringe A, in denen die Voraussetzungen aus Satz 2.2.10 nicht erfüllt sind,

$$B(0;1) \subset A^o$$

gilt: Ist $|x| \leq 1$, so auch $|x^n| \leq |x|^n \leq 1$ und $\{\, x^n \;\mid n \in \mathbb{N}\,\}$ ist metrisch beschränkt.

Das folgende Beispiel zeigt, dass es normierte Ringe gibt, deren Topologie nicht die diskrete Topologie ist und in denen topologische Beschränktheit und metrische Beschränktheit nicht übereinstimmen. Wir brauchen die zwei folgenden, bekannten Tatsachen:

Sind zwei normierte Ringe $(A, |\cdot|_A)$, $(B, |\cdot|_B)$ gegeben, so ist $A \times B$ mit

$$|(a,b)|_{A\times B} = \max(|a|_A, |b|_B)$$

ein normierter Ring.

Ist A ein normierter Ring und $I \subset A$ ein abgeschlossenes Ideal, dann definiert

$$|\bar{x}|_{A/I} = \inf_{(x-x')\in I}\{|x'|\}$$

eine Norm auf dem Quotientenring A/I, die *Restklassennorm*. Vergleiche dazu 1.1.6, 1.2.1. Remark 2, und 2.1.2. Proposition 1 von [BGR84].

Beispiel 2.2.13. Sei $A = \mathbb{Z}$ mit der p-adischen Bewertung. Sei $B = (\mathbb{Z}/p^2)[X]$ mit der ρ-Supremumsnorm aus Beispiel 2.1.14 mit $\rho = p$. Auf $\mathbb{Z}/p^2$ betrachten wir die von der p-adischen Bewertung induzierte Restklassennorm; wir merken dazu an, dass in $\mathbb{Z}$ die Gleichheit $x\mathbb{Z} = \bar{B}(0;|x|_p)$ gilt. Vergleiche dazu Lemma 2.4.6. Der Ring

$$C = \mathbb{Z} \times ((\mathbb{Z}/p^2)[X])$$

wird mit

$$|(a, \sum_\nu \bar{a}_\nu X^\nu)|_C \;= \max(|a|_p, |\bar{a}_\nu|_{\mathbb{Z}/p^2} p^\nu).$$

zu einem normierten Ring. Wegen $|(p^\nu, 0)| = p^{-\nu}$ ist die induzierte Topologie auf C nicht die diskrete Topologie. Weiterhin ist die Menge

$$S = \left\{ (0, \bar{p}X^i) \;\middle|\; i \in \mathbb{N} \right\}$$

offensichtlich metrisch nicht beschränkt, da $\bar{p} \neq 0$ in $\mathbb{Z}/p^2$ ist.
Wir behaupten nun, dass

$$B(0; |p|) \cdot S = \{0\}$$

gilt, woraus sofort folgt, dass S topologisch beschränkt ist.
Sei $f = \sum_\nu \bar{a}_\nu X^\nu \in B(0; |p|)$. Aus $|(a, f)|_C < |p|$ folgt insbesondere, dass

$$|f| = \max_\nu \{|\bar{a}_\nu| p^\nu\} < |p|$$

gilt. Angenommen für ein $\nu \geq 1$ ist $\bar{a}_\nu \neq 0$, dann ist $|a'|_\nu > |p|^2$ für alle Lifts a' von $\bar{a}_\nu$. Nach Definition ergibt sich $|\bar{a}_\nu| \geq |p|^2$. Damit ist

$$|f| \geq |\bar{a}_\nu| p^\nu \geq |p|^2 p^\nu = p^{-2} p^\nu \geq p^{-1} = |p|,$$

was ein Widerspruch zu $|f| < |p|$ ist. Es ergibt sich also $f \in \mathbb{Z}/p^2$ und zusammen mit $|f| < |p|$ ergibt sich, dass f durch p teilbar ist. Insbesondere ist $f \cdot \bar{p}X^i = 0$ in $(\mathbb{Z}/p^2)[X]$ und es folgt die Behauptung.

In dem obigen Beispiel ist die Norm wegen $(0, p)^2 = 0$ offensichtlich keine Bewertung. Es reicht indes eine etwas schwächere Voraussetzung, unter der metrische Beschränktheit und topologische Beschränktheit für Mengen gleich sind:

Satz 2.2.14. *Sei $(A, |\cdot|)$ ein normierter Ring, sodass es für alle $\varepsilon > 0$ ein Element $x \in A$ mit $0 < |x| < \varepsilon$ gibt. Sei $(R, |\cdot|)$ eine treu normierte A-Algebra. Dann gilt: eine Teilmenge $S \subset R$ ist genau dann topologisch beschränkt, wenn sie metrisch beschränkt ist.*

Beweis. Die eine Richtung ist Lemma 2.2.12. Sei umgekehrt $S \subset R$ topologisch beschränkt. Sei $U = B(0; 1)$, dann gibt es ohne Einschränkung ein $\varepsilon > 0$ mit $B(0; \varepsilon)S \subset B(0; 1)$. Nach Voraussetzung gibt es ein $x \in B(0; \varepsilon) \cap A$ mit $x \neq 0$. Sei $s \in S$, dann ist $|x||s| = |xs| < 1$. Mit $\delta = |x|^{-1}$ folgt $S \subset B(0; \delta)$. □

Für uns wird die folgende Aussage wichtig sein.

Korollar 2.2.15. *Sei K ein nicht-trivial bewerteter Körper und R eine normierte K-Algebra. Dann ist eine Menge genau dann topologisch beschränkt, wenn sie metrisch beschränkt ist.*

Beweis. Nach Lemma 2.1.13 ist R treu normiert. Sei $\varepsilon > 0$ gegeben. Da die Bewertung auf K nicht-trivial ist, gibt es $x \in K$ mit $|x| \neq 1$ und für genügend großes n ist entweder $|x^n| < \varepsilon$ oder $|x^{-n}| < \varepsilon$. Daher folgt die Aussage aus dem obigen Satz. □

Auch in normierten K-Algebren R ist die Menge R^o der potenzbeschränkten Elemente im Allgemeinen nicht beschränkt, wie das folgende Beispiel zeigt.

Beispiel 2.2.16. Sei $K = \mathbb{Q}$ mit der p-adischen Bewertung; $\mathbb{Q}[X]$ der Polynomring mit 1-Supremumsnorm (siehe Beispiel 2.1.14). Wir setzen $R = \mathbb{Q}[X]/(X^2)$ und betrachten auf R die Restklassennorm:

$$|\bar{f}| = \inf_{\overline{f'}=\bar{f}} \{|f'|\}$$

Wir behaupten, dass (X^2) in $\mathbb{Q}[X]$ abgeschlossen ist. $|\cdot|$ ist dann eine K-Algebranorm auf R. Aus Lemma 2.1.13 folgt, dass R eine treu normierte $\mathbb{Q}$-Algebra ist. Die Elemente $(1/p^n)X$ sind in R potenzbeschränkt, da nilpotent. Aber $|(1/p^n)X|_R = p^n$ ist nicht beschränkt.

Beweis der Behauptung. Wir zeigen, dass (X^2) in $\mathbb{Q}[X]$ abgeschlossen ist; da die Topologie von einer Pseudometrik induziert ist, reicht es zu zeigen, dass Grenzwerte konvergenter Folgen in (X^2) ebenfalls in (X^2) sind: Sei $(X^2 f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge in (X^2), die gegen $f \in \mathbb{Q}[X]$ konvergiert. Seien $g \in \mathbb{Q}[X]$ und $a, b \in \mathbb{Q}$ mit $f = X^2 g + bX + a$. Dann ist für alle $n \in \mathbb{N}$:

$$|f - X^2 f_n| = |X^2(f_n - g) + bX + a| \geq \max(|b|_p, |a|_p).$$

Da die linke Seite gegen 0 konvergiert, folgt $a = b = 0$ und damit $f \in (X^2)$. □

Bemerkung 2.2.17. Ist die Norm auf A eine nicht-degenerierte Bewertung, dann gilt

$$A^o = \bar{B}(0;1) = \{\, x \in A \ \mid\ |x| \leq 1 \,\} :$$

In A sind nämlich nach Satz 2.2.14 Elemente x genau dann potenzbeschränkt, wenn die Menge $\{\, |x^n| \ \mid\ n \in \mathbb{N} \,\}$ beschränkt ist. Ist $|x| > 1$ so ist dies wegen $|x^n| = |x|^n$ offensichtlich nicht der Fall und x nicht potenzbeschränkt.

In seiner Definition verlangt Scholze, dass die Menge der potenzbeschränkten Elemente beschränkt ist (vgl: Bemerkung 2.2.6), und dass Morphismen stetig sind. Es gibt in diesem Fall eine äquivalente Charakterisierung stetiger K-Algebra-Morphismen, die für die weitere Beweisführung in Kapitel 4 gebraucht wird.

Satz 2.2.18. *Sei $(K, |\cdot|)$ ein nicht-trivial bewerteter Körper. Seien $(R, |\cdot|)$ und $(S, |\cdot|)$ normierte K-Algebren. Sei die Menge der potenzbeschränkten Elemente $S^o \subset S$ beschränkt. Ein K-Algebramorphismus $f : R \to S$ ist genau dann stetig, wenn $f(R^o) \subset S^o$.*

Um den Satz zu beweisen, brauchen wir einige Vorüberlegungen. Dazu heiße ein Ringhomomorphismus $\varphi : A \to B$ zwischen Ringen mit Halbnormen $|\cdot|_A$ bzw. $|\cdot|_B$ *beschränkt*, wenn es ein $\varepsilon > 0$ gibt, sodass für alle $x \in A$ bereits

$$|\varphi(x)|_B \leq \varepsilon |x|_A$$

gilt [BGR84, S. 13]. Wir haben die bekannte Aussage:

Satz 2.2.19. *Seien $(A, |\cdot|_A)$ und $(B, |\cdot|_B)$ Ringe mit Halbnorm. Sei $\varphi : A \to B$ ein Ringhomomorphismus. Dann gilt:*

(a) Ist φ stetig bei $0 \in A$, dann ist φ überall stetig.

(b) Ist φ beschränkt, dann ist φ stetig.

Beweis. Siehe [BGR84, 1.1.3, Proposition 6]. □

Bemerkung 2.2.20. Es gilt also, dass für eine normierte A-Algebra R der Morpismus $A \to R$ stetig ist, woraus direkt folgt, dass für alle $a \in A$ die Abbildung $R \to R; x \mapsto ax$ stetig ist. Ist insbesondere A ein Körper und $a \in A^\times$, dann ist eine Menge $U \subset R$ genau dann offen, wenn $aU \subset R$ offen ist.

Die Umkehrung von Satz 2.2.19 (b) gilt im Allgemeinen aber nicht, wie folgendes Beispiel zeigt.

Beispiel 2.2.21. Sei $A = B = \mathbb{Z}[X]$. Sei $|\cdot|_A$, die Norm auf A, die durch

$$|f|_A = \begin{cases} 0 & \text{wenn } f = 0 \\ 1 & \text{wenn } f \neq 0 \end{cases}$$

definiert ist. Sei $|\cdot|_B = \alpha^{\deg}$ die Norm auf B aus Beispiel 2.1.5. In beiden Topologien ist $\{0\} = B(0; 1)$ offen, also sind beide Topologien diskret. Das heißt, jede Abbildung zwischen den beiden Ringen ist stetig, insbesondere die Identität. Diese ist aber nicht beschränkt, denn $|X^n|_A = 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$, aber $|X^n|_B = \alpha^n \to \infty$ für $n \to \infty$.

Es gilt aber der

Satz 2.2.22. *Sei $(A, |\cdot|)$ ein Ring mit nicht-degenerierter Bewertung und R, R' treu normierte A-Algebren. Dann ist ein A-Algebra-Morphismus $\varphi : R \to R'$ genau dann stetig, wenn er beschränkt ist.*

Beweis. Dass Beschränktheit Stetigkeit impliziert ist Satz 2.2.19 (b). Für die andere Richtung siehe [BGR84, 2.1.8, Proposition 2]. □

Damit können wir den Satz 2.2.18 beweisen.

Beweis von Satz 2.2.18. Sei zuerst $f : R \to S$ stetig. Nach Satz 2.2.22 ist f beschränkt, das heißt, es gibt ein $\delta > 0$, sodass $|f(y)| \leq \delta|y|$ für alle $y \in R$. Sei nun $x \in R^o$. Nach Korollar 2.2.15 gibt es ein $\varepsilon > 0$, sodass $|x^n| < \varepsilon$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt. Es gilt also

$$|f(x)^n| \ = |f(x^n)| \leq \delta|x^n| < \delta\varepsilon$$

für alle $n \in \mathbb{N}$, woraus folgt, dass $f(x) \in S^o$ gilt.
Gelte umgekehrt $f(R^o) \subset S^o$. Nach Satz 2.2.19 (a) reicht es zu zeigen, dass $f : R \to S$ bei 0 stetig ist. Da wir pseudometrische Räume betrachten, reicht Folgenstetigkeit bei 0. Es gibt nach Voraussetzung ein $\delta > 0$ mit $S^o \subset B(0;\delta)$. Sei nun $(x_i)_{i\in\mathbb{N}}$ eine Nullfolge in R. Sei $c \in K$ mit $0 < |c| < 1$, dann gibt es eine Folge $(n_i)_{i\in\mathbb{N}}$ in $\mathbb{N}$, sodass $(c^{n_i})_{i\in\mathbb{N}}$ eine Nullfolge ist und $|x_i| \leq |c^{n_i}|$ gilt. Daraus ergibt sich, dass $c^{-n_i}x_i \in \overline{B}(0;1) \subset R^o$ und damit $f(c^{-n_i}x_i) \in S^o \subset B(0;\delta)$. Es folgt $|f(x_i)| = |c^{n_i}||f(c^{-n_i}x_i)| \leq |c^{n_i}|\delta$. Das zeigt, dass $f(x_i)$ eine Nullfolge ist und $f : R \to S$ bei 0 stetig ist. □

2.3 Cauchy-Folgen und Vervollständigungen

Wir beginnen mit folgender, bekannter Tatsache, die zum Beispiel für bewertete Körper in [Neu92, S. 131] zu finden ist:

Lemma 2.3.1. *Sei $(A;|\cdot|)$ ein Ring mit Halbnorm. Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in A, die konvergiert. Sei $x \in A$ ein Grenzwert dieser Folge mit $|x| \neq 0$. Dann gibt es ein $N \in \mathbb{N}$ so, dass $|x| = |x_n|$ für alle $n \geq N$ gilt.*

Beweis. Da die Folge (x_n) gegen x konvergiert, gibt es ein $N \in \mathbb{N}$ so, dass für alle $n \geq N$ gilt: $|x - x_n| < \ |x| \neq 0$. Dann folgt mit Satz 2.1.2 (c), dass

$$|x_n| = |(x_n - x) + x| = \max(|x_n - x|, |x|) = |x|. \qquad \square$$

Die Begriffe Cauchy-Folge und Vollständigkeit sind bei der Frage, unter welchen Bedingungen Potenzreihen konvergieren, zentral.

Definition 2.3.2. Sei $(A,|\cdot|)$ ein Ring mit Halbnorm. Eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ heißt *Cauchy-Folge*, wenn es für alle $\varepsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$ gibt, sodass für alle $n, m \geq N$ bereits $|x_n - x_m| < \varepsilon$ gilt.
Ein Ring $(A,|\cdot|)$ mit Halbnorm heißt *vollständig*, wenn jede Cauchy-Folge in A einen Grenzwert in A hat. Wir sagen kurz: *A ist vollständig.*

Die verschärfte Dreiecksungleichung liefert ein sehr starkes Kriterium, wann eine Folge Cauchy-Folge ist:

Satz 2.3.3 ([BGR84, 1.1.7, Proposition 1]). *Sei $(A, |\cdot|)$ ein Ring mit Halbnorm. Eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist genau dann Cauchy-Folge, wenn es für alle $\varepsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$ gibt, sodass für alle $n \geq N$ bereits $|x_{n+1} - x_n| < \varepsilon$ gilt.*

Beweis. Seien die Voraussetzungen des Satzes gegeben und seien $j > i \geq N$, dann schätzen wir mit Hilfe von Satz 2.1.2 (b) ab:

$$|x_j - x_i| = |(x_j - x_{j-1}) + \cdots + (x_{i+1} - x_i)| \leq \max(|x_j - x_{j-1}|, \ldots, |x_{i+1} - x_i|) < \varepsilon. \qquad \square$$

Korollar 2.3.4. *Sei $(A, |\cdot|)$ ein Ring mit Halbnorm, der bezüglich $|\cdot|$ vollständig ist. Dann konvergiert eine Reihe $\sum_{i=0}^{\infty} a_i$ genau dann, wenn die Folge $(a_i)_{i\in\mathbb{N}}$ eine Nullfolge ist.*

Beweis. Die Aussage folgt sofort aus obigem Satz. $\square$

Wir sehen, dass diese Eigenschaft die verschärfte Dreiecksungleichung voraussetzt. Zum Beispiel konvergiert die harmonische Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n$ in $\mathbb{R}$ mit der euklidischen Metrik nicht.

Bemerkung 2.3.5. Sei $\sum_{i=0}^{\infty} a_i$ eine konvergente Reihe, dann ergibt sich aus Lemma 2.3.1, Satz 2.1.2 (c) und da (a_i) eine Nullfolge ist, für alle Grenzwerte a mit $|a| \neq 0$ von $\sum_{i=0}^{\infty} a_i$ die Gleichung

$$|a| = \max_{i\in\mathbb{N}}(|a_i|).$$

Der Umordnungssatz, der im archimedischen Fall im Allgemeinen nur für absolute Konvergenz gültig ist, gilt bei uns stets:

Satz 2.3.6. *Sei $(A, |\cdot|)$ ein Ring mit Halbnorm, sei $\sum_{i=0}^{\infty} a_i$ eine konvergente Reihe und sei $\pi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ eine Bijektion. Dann konvergiert auch die Reihe $\sum_{i=0}^{\infty} a_{\pi(i)}$.*
Ist a ein Grenzwert von $\sum_{i=0}^{\infty} a_i$, so ist a auch ein Grenzwert von $\sum_{i=0}^{\infty} a_{\pi(i)}$.

Beweis. Der Beweis ist analog zu dem Beweis von [BGR84, Proposition 2] mit $I_\mu = \{\pi(\mu)\}$. $\square$

Wie metrische Räume kann man auch pseudometrische Räume vervollständigen. In unserem Fall der Ringe mit Halbnorm erhalten wir einen vollständigen Ring mit Norm. Für eine ausführliche Diskussion siehe [BGR84, 1.1.7]; dort werden Vervollständigungen halbnormierter Gruppen besprochen.
Nach [BGR84, 1.2.1, Remark 1] können wir diese direkt auf Ringe mit Halbnorm anwenden (jeder Ring mit Halbnorm ist auch eine Gruppe mit Halbnorm). Wir werden hier Ergebnisse zusammentragen.

Wir erinnern daran, dass eine Abbildung $\varphi : A \to B$ zwischen zwei halbnormierten Ringen $(A, |\cdot|_A)$ und $(B, |\cdot|_B)$ *isometrisch* heißt, wenn für alle $x \in A$ bereits $|\varphi(x)|_B = |x|_A$ gilt.

Definition 2.3.7. Sei $(A, |\cdot|)$ ein Ring mit Halbnorm. Ein Tripel $(\hat{A}, |\cdot|', \iota)$ heißt *Vervollständigung von A*, wenn

(i) $(\widehat{A}, |\cdot|')$ ein vollständig normierter Ring ist,

(ii) $\iota : A \to \widehat{A}$ ein isometrischer Ringhomomorphismus ist, und

(iii) $\iota(A)$ dicht in $\widehat{A}$ liegt.

Die Definition für Gruppen ist [BGR84, 1.1.7, Definition 4].

Satz 2.3.8. *Sei $(A, |\cdot|)$ ein Ring mit Halbnorm. Dann gibt es eine Vervollständigung $(\widehat{A}, |\cdot|', \iota)$ von A.*

Beweis. Der Beweis für Gruppen ist [BGR84, 1.1.7, Proposition 5]: Man betrachte den Raum C der Cauchy-Folgen aus A. Dieser ist auf kanonische Weise ein Ring. Auf diesem setzt man $|(a_n)_{n\in\mathbb{N}}|' = \lim_{n\to\infty} |a_n|$ und hat eine Isometrie $A \to C$ via $a \mapsto (a, a, \ldots)$. Man zeigt, dass C vollständig ist. Schließlich teilt man das Ideal I der Nullfolgen heraus und betrachtet die Restklassenhalbnorm, die dann eine Norm ist. Man setzt dann $\widehat{A} = C/I$ und zeigt, dass dies alle Bedingungen aus Definition 2.3.7 erfüllt sind.
Mit [BGR84, 1.2.1, Remark 2] fehlt nur zu zeigen, dass $|(a_n)_{n\in\mathbb{N}}|' = \lim_{n\to\infty} |a_n|$ auch die Bedingungen einer Ringhalbnorm erfüllt. $|1|' \leq 1$ ist wegen $|1|' = |1|$ klar. Für $(a_n)_n, (b_n)_n \in C$ ist

$$\begin{aligned} |(a_n)_n \cdot (b_n)_n|' = |(a_nb_n)_n|' = \lim_{n\to\infty} |a_nb_n| \quad &\leq \quad \lim_{n\to\infty} |a_n||b_n| = \\ = \lim_{n\to\infty} |a_n| \cdot \lim_{n\to\infty} |b_n| \quad &= \quad |(a_n)_n|'|(b_n)_n|'. \end{aligned}$$

□

Es gilt folgende, wichtige Eigenschaft der Vervollständigungen:

Satz 2.3.9. *Seien $(A, |\cdot|_A)$ und $(B, |\cdot|_B)$ Ringe mit Halbnorm und $(\widehat{A}, |\cdot|'_A, \iota_A)$ bzw. $(\widehat{B}, |\cdot|'_B, \iota_B)$ Vervollständigungen. Sei $\varphi : A \to B$ ein stetiger Ringhomomorphismus.*

(a) Es gibt einen eindeutigen stetigen Ringhomomorphismus $\widehat{\varphi} : \widehat{A} \to \widehat{B}$, sodass das Diagramm

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "\iota_A"'] & B \arrow[d, "\iota_B"] \\ \widehat{A} \arrow[r, "\widehat{\varphi}"] & \widehat{B} \end{tikzcd}$$

kommutiert.

(b) *Seien Ringe mit Halbnorm* $(A, |\cdot|_A), (B, |\cdot|_B)$ *und* $(C, |\cdot|_C)$ *mit Vervollständigungen* $(\widehat{A}, |\cdot|'_A), (\widehat{B}, |\cdot|'_B)$ *bzw.* $(\widehat{C}, |\cdot|'_C$ *gegeben. Seien* $\varphi : A \to B$ *und* $\psi : B \to C$ *stetige Abbildungen, dann gilt:*

$$\widehat{\psi \circ \varphi} = \widehat{\psi} \circ \widehat{\varphi}$$

Ist $(A, |\cdot|_A) = (B, |\cdot|_B)$ *und* $(\widehat{A}, |\cdot|'_A, \iota_A) = (\widehat{B}, |\cdot|'_B, \iota_B)$ *und* $\varphi = 1_A$*, dann ist* $\widehat{\varphi} = 1_{\widehat{A}}$.

Bemerkung 2.3.10. Insbesondere sind Vervollständigungen eindeutig bis auf isometrischen Isomorphismus bestimmt. Außerdem ist die Isometrie ι_A injektiv, wenn die Halbnorm $|\cdot|_A$ auf A eine Norm ist, und wir identifizieren A mit $\iota_A(A) \subset \widehat{A}$.
Es ist im Allgemeinen hingegen nicht klar, dass aus der Injektivität eines stetigen Ringhomomorphismus $\varphi : A \to B$ zwischen normierten Ringen auch folgt, dass $\widehat{\varphi} : \widehat{A} \to \widehat{B}$ injektiv ist.

Beweis von Satz 2.3.9. Siehe [BGR84, 1.1.7, Proposition 6]; nach Konstruktion ist es leicht zu sehen, dass der eindeutige Gruppenhomomorphismus $\widehat{\varphi} : \widehat{A} \to \widehat{B}$ ein Ringhomomorphismus ist, wenn $\varphi : A \to B$ ein Ringhomomorphismus ist. □

Bemerkung 2.3.11. Aus Lemma 2.3.1 folgt sofort $|\widehat{A}|' = |A|$.

Beispiel 2.3.12. Sei $A = \mathbb{Z}$ bzw. $A = \mathbb{Q}$ mit der p-adischen Bewertung $|\cdot|_p : A \to \mathbb{R}_{\geq 0}$. Dann bezeichnen wir $\widehat{A}$ mit $\mathbb{Z}_p$ bzw. $\mathbb{Q}_p$ und nennen dies die *(ganzen) p-adischen Zahlen.*

Der folgende Satz ist von der Beobachtung motiviert, dass $\mathbb{Q}_p$ den Restklassenkörper $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ hat, siehe Beispiel 2.4.2. Wir werden diesen Satz in den Kapiteln 4 und 5 benutzen. In der Literatur findet man meist nur den Spezialfall eines diskret bewerteten Körpers (z. Bsp. in [Neu92]), oder eine ähnliche Aussage für Gruppen, wenn man $R^o = \{ x \in R \mid |x| \leq 1 \}$ hat, (ohne Beweis in [BGR84, S. 19]).

Satz 2.3.13. *Sei* $(K, |\cdot|)$ *ein Körper mit nicht-trivialer Bewertung und* $(R, |\cdot|_R)$ *eine normierte* K*-Algebra. Sei* $\hat{R}$ *die Vervollständigung von* R *bezüglich* $|\cdot|_R$ *und sei* $a \in K^\times$ *mit* $|a| < 1$ *Es gilt*

$$(\widehat{R})^o = \widehat{R^o}$$

und die Einbettung $R^o \to \widehat{R^o}$ *induziert einen Ringisomorphismus*

$$R^o/a \cong (\widehat{R})^o/a.$$

Beweis. Sei $\iota : R \to \hat{R}$ die Isometrie, sodass $\iota(R)$ dicht in $\widehat{R}$ liegt. Wir erinnern daran, dass nach Korollar 2.2.15 ein Element $x \in R$ oder $x \in \widehat{R}$ genau dann potenzbeschränkt ist, wenn es ein $\varepsilon > 0$ gibt, sodass für alle $n \in \mathbb{N}$ bereits $|x^n| < \varepsilon$ gilt. Daher ist $\iota(R^o) \subset (\widehat{R})^o$ und wir identifizieren R^o mit $\iota(R^o)$ als Unterring von $(\widehat{R})^o$. Nach Satz 2.2.10 ist $(\widehat{R})^o$ ein offener und abgeschlossener Unterring. Aus Abgeschlossenheit folgt, dass $\widehat{R^o} \subset (\widehat{R})^o$. Sei umgekehrt $x = \lim_{n\to\infty} x_n \in (\widehat{R})^o$ mit $x_n \in R$, dann folgt aus Offenheit, dass auch fast alle $x_n \in (\widehat{R})^o \cap R \subset R^o$ sind. Insbesondere folgt dann $x \in \widehat{R^o}$. Es gilt also

$$(\widehat{R})^o = \widehat{R^o}.$$

Wir behaupten, dass die Einbettung $R^o \subset \widehat{R^o}$ einen surjektiven Ringhomomorphismus $R^o \to \widehat{R^o}/a$ induziert: Sei $x \in \widehat{R^o}$, dann gibt es eine Folge $(x_n)_n$ in R^o, die gegen x konvergiert. Es gibt also ein $n \in \mathbb{N}$ mit $|x_n - x|_R < |a| \neq 0$, woraus folgt, dass $a^{-1}(x_n - x) \in R^o$. Insbesondere ist $(x_n - x) \in a\widehat{R^o}$, und es gilt Surjektivität. Der Kern ist offenbar gerade aR^o. □

Als letzte Aussage in diesem Abschnitt beweisen wir das folgende Lemma.

Lemma 2.3.14. *Sei K ein nicht-trivial bewerteter Körper und R eine normierte K-Algebra. Dann gilt: R^o ist genau dann vollständig, wenn R vollständig ist.*

Beweis. Da R^o in dieser Situation abgeschlossen ist, folgt aus Vollständigkeit von R sofort die Vollstänigkeit von R^o.
Sei umgekehrt $(x_n)_n$ eine Cauchy-Folge in R. Da Cauchyfolgen beschränkt sind, gibt es ein $y \in K$ mit $|x_n| \leq |y|$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Daraus folgt, dass $(y^{-1}x_n)_n$ eine Cauchyfolge in R^o ist. Habe diese Grenzwert $x' \in R^o$, so ist klar, dass $(x_n)_n$ den Grenzwert $x = yx'$ hat. □

2.4 Bewertete Körper

In diesem Abschnitt wollen wir einige, wohlbekannte Tatsachen über Körper mit Bewertungen zusammentragen. Außerdem bietet sich so die Gelegenheit, Notationen festzuhalten.

Sei K ein Körper und $|\cdot| : K \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ eine Bewertung. Ab sofort nehmen wir, wenn nicht anders erwähnt, immer an, dass diese Bewertung nicht-trivial ist. Nach Bemerkung 2.2.17 ist die Menge der potenzbeschränkten Elemente gegeben durch

$$K^o = \{\, x \in K \ \mid\ |x| \leq 1 \,\}.$$

Es ist klar, dass dies ein Ring ist. Er heißt *der Bewertungsring von K bezüglich $|\cdot|$*.
Für ein $x \in K$ gilt, dass $x \in K^o$ oder $x^{-1} \in K^o$ ist, da $|x^{-1}| = |x|^{-1}$. Einen solchen Ring

nennt man auch gemeinhin *Bewertungsring*. Siehe dazu [AM69, Chapter 5].
Wir sehen, dass die Menge der Einheiten von K^o gerade

$$(K^o)^\times = \{ x \in K \mid |x| = 1 \}$$

ist und

$$\mathfrak{m} = \{ x \in K \mid |x| < 1 \}$$

ein Ideal in K^o ist. Wegen $\mathfrak{m} = K^o - (K^o)^\times$, ist $\mathfrak{m}$ das einzige maximale Ideal von K^o und K^o ein lokaler Ring. Dies ist eine allgemeine Eigenschaft von Bewertungsringen [AM69, Proposition 5.18 (a)].

Man nennt $k = K^o/\mathfrak{m}$ *den Restklassenkörper von* K *bezüglich* $|\cdot|$.

Beispiel 2.4.1. Sei auf $\mathbb{Q}$ die p-adische Bewertung $|\cdot|_p$ gegeben. Dann ist $K^o = \mathbb{Z}_{(p)}$, die an dem Primideal (p) lokalisierten ganzen Zahlen. Wir haben weiterhin $\mathfrak{m} = p\mathbb{Z}_{(p)}$ und $k = K^o/\mathfrak{m} = \mathbb{Z}/p$.

Beispiel 2.4.2. Sei $K = \mathbb{Q}_p$ der Körper der p-adischen Zahlen mit der p-adischen Bewertung $|\cdot|_p$. Aus Satz 2.3.13 folgt, dass $K^o = \mathbb{Z}_p$, die Vervollständigung von $\mathbb{Z}_{(p)}$ bezüglich $|\cdot|_p$ ist. Analog zum Beweis von Satz 2.3.13 zeigt man, dass der Restklassenkörper eines bewerteten Körpers K isomorph zu dem Restklassenkörper von $\widehat{K}$ ist. Wir haben also

$$(\mathbb{Q}_p)^o/\mathfrak{m} \cong \mathbb{Z}/p.$$

Einen Bewertungsring, dessen maximales Ideal wie hier ein Hauptideal ist, heißt *diskreter Bewertungsring*. Dementsprechend heißt eine Bewertung $|\cdot| : K \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ auf einem Körper K eine *nicht-diskrete Bewertung*, wenn der zugehörige Bewertungsring kein diskreter Bewertungsring ist.
Die Bezeichnungen kommen von der Tatsache, dass eine Bewertung auf einem Körper K genau dann diskret ist, wenn $|K^\times| \subset \mathbb{R}_{\geq 0}$ eine diskrete Teilmenge der reellen Zahlen ist ([Sch02, Lemma 1.4]).

Beispiel 2.4.3. Wir wählen in einem algebraischen Abschluss von $\mathbb{Q}$ für jedes $m \in \mathbb{N}$ ein System von p^m-ten Wurzeln p^{1/p^m} aus p, sodass $(p^{1/p^{m+1}})^p = p^{1/p^m}$ gilt. Wir erhalten einen Turm von Körpererweiterungen

$$\mathbb{Q} \subset \mathbb{Q}(p^{1/p}) \subset \cdots \subset \mathbb{Q}(p^{1/p^m}) \subset \cdots$$

und setzen

$$\mathbb{Q}(p^{1/p^\infty}) = \bigcup_{m=0}^{\infty} \mathbb{Q}(p^{1/p^m}).$$

Wir können die p-adische Bewertung auf $\mathbb{Q}(p^{1/p^\infty})$ eindeutig fortsetzen und dann gilt $|p^{1/p^m}| = (1/p)^{1/p^m} < 1$. Siehe dazu [Neu92, Theorem II. 4.8]. Inbesondere gibt es kein Element $x \in \mathfrak{m}$ mit maximaler Bewertung, woraus folgt, dass die p-adische Bewertung auf $\mathbb{Q}(p^{1/p^\infty})$ nicht-diskret ist. Wir behaupten

$$(\mathbb{Q}(p^{1/p^\infty}))^o = \mathbb{Z}_{(p)}[p^{1/p^\infty}] \quad \text{und} \quad (\mathbb{Q}(p^{1/p^\infty}))^o/\mathfrak{m} = \mathbb{Z}/p.$$

Beweis der Behauptung. Der Lesbarkeit wegen schreiben wir $|\cdot| = |\cdot|_p$. Für die Erweiterung $\mathbb{Q}(p^{1/p^m})$ ist $\left\{ p^{i/p^m} \;\middle|\; 0 \leq i \leq p^{m+1} - 1 \right\}$ eine Basis und wir können Elemente $x \in \mathbb{Q}(p^{1/p^\infty})$ schreiben als

$$x = \sum_{i=0}^{p^n-1} a_i p^{i/p^n} \quad a_i \in \mathbb{Q}.$$

Sei $x = \sum_{i=0}^{p^n-1} a_i p^{i/p^n} \in \mathbb{Z}_{(p)}[p^{1/p^\infty}]$, das heißt ohne Einschränkung $a_i \in \mathbb{Z}_{(p)}$. Dann ist

$$|x| \leq \max_{0 \leq i \leq p^n-1} \{|a_i|(1/p)^{i/p^n}\} \leq \max_{0 \leq i \leq p^n-1} \{|a_i|\} \leq 1.$$

Sei umgekehrt $x = \sum_{i=0}^{p^n-1} a_i p^{i/p^n} \in \mathbb{Q}(p^{1/p^\infty})$ mit $|x| \leq 1$ gegeben. Angenommen es gibt ein i so, dass $a_i \notin \mathbb{Z}_{(p)}$, also dass $|a_i| > 1$, dann ist nach Definition der p-adischen Bewertung $|a_i| \geq p$ und damit $|a_i p^{i/p^n}| = |a_i| p^{-i/p^n} \geq p^{1-(i/p^n)} > 1$. Dann gibt es wegen Satz 2.1.2 (e) auch einen Index $j \neq i$ mit $|a_j p^{j/p^n}| = |a_i p^{i/p^n}|$. Wir können ohne Einschränkung $i < j$ annehmen und es gibt ein $m \in \mathbb{Z}$ so, dass

$$p^m = |a_i||a_j|^{-1} = |p^{(j-i)/p^n}|.$$

Dann muss aber $j = i$ sein, was einen Widerspruch ergibt. Es gilt also tatsächlich $(\mathbb{Q}(p^{1/p^\infty}))^o = \mathbb{Z}_{(p)}[p^{1/p^\infty}]$.
Um den Restklassenkörper zu bestimmen, überprüft man, dass durch $\sum_{i=0}^{p^n-1} a_i p^{i/p^n} \mapsto (a_0 \mod p)$ ein surjektiver Ringhomomorphismus $\mathbb{Z}_{(p)}[p^{1/p^\infty}] \to \mathbb{Z}_{(p)}/p \cong \mathbb{Z}/p$ definiert ist. Wieder wie oben folgt, dass $\sum_{i=0}^{p^n-1} a_i p^{i/p^n} \in \mathfrak{m}$ genau dann, wenn $|a_0| < 1$, also $p \mid a_0$. Es ist also $\mathbb{Z}[p^{1/p^\infty}]/\mathfrak{m} \cong \mathbb{Z}/p$. □

Beispiel 2.4.4. Analog zum vorherigen Beispiel erhalten wir einen bewerteten Körper $\mathbb{Q}_p(p^{1/p^\infty})$ mit Bewertungsring $\mathbb{Z}_p[p^{1/p^\infty}]$ und Restklassenkörper $\mathbb{Z}/p$. Obwohl $\mathbb{Q}_p$ vollständig ist, ist $\mathbb{Q}_p(p^{1/p^\infty})$ nicht vollständig. Es ist eine allgemeine Tatsache, dass unendliche algebraische Erweiterungen von bewerteten Körpern nicht vollständig sind (siehe [Neu92]). In diesem konkreten Fall kann man das wie auf Seite 84 zeigen.

Die Almost Ring Theory, die wir in Kapitel 3 behandeln und in Kapitel 4 benutzen, hat als Grundbaustein einen Ring V mit einem Ideal $\mathfrak{m}$, für das $\mathfrak{m}^2 = \mathfrak{m}$ gilt. Dies ist bei nicht-diskret bewerteten Körpern durch das maximale Ideal des Bewertungsringes gegeben ([GR03, Example 2.1.2. (i)] dort ohne Beweis):

Lemma 2.4.5. *Sei K ein Körper mit nicht-diskreter Bewertung. Dann gilt für das maximale Ideal $\mathfrak{m}$ des Bewertungsringes K^o, dass*

$$\mathfrak{m}^2 = \mathfrak{m}.$$

Beweis. Wir müssen nur zeigen, dass $\mathfrak{m} \subset \mathfrak{m}^2$. Sei $x \in \mathfrak{m}$, also $|x| < 1$. Da die Bewertung nicht-diskret ist, gibt es ein $y \in \mathfrak{m}$ mit $|x| < |y| < 1$: ansonsten wäre nach Lemma 2.4.6 (a) nämlich $\mathfrak{m} = (x)$. Es folgt sofort, dass $|xy^{-1}| = |x||y|^{-1} < 1$, also $x = (xy^{-1})y \in \mathfrak{m}^2$. □

Wir halten zwei bekannte, nützliche Beobachtungen, die insbesondere auch für nicht-diskrete Bewertungen gelten, in folgendem Lemma fest:

Lemma 2.4.6. *Sei K ein bewerteter Körper, K^o sein Bewertungsring.*

(a) Seien $x, y \in K^o$. Wir haben $|x| \leq |y|$ genau dann, wenn $x \in (y)$ gilt.

(b) Jedes endlich erzeugte Ideal von K^o ist ein Hauptideal.

Beweis. (a) Sei $x \in (y)$, dann gibt es ein $z \in K^o$ mit $x = yz$. Da $|z| \leq 1$ folgt $|x| = |y||z| \leq |y|$. Gilt umgekehrt $|x| \leq |y|$, dann ist $|xy^{-1}| \leq 1$ und damit $xy^{-1} \in K^o$. Also ist $x = y(xy^{-1}) \in (y)$.

(b) Sei $I = (x_1, \ldots, x_n)$ und ohne Einschränkung $|x_1| = \max(|x_1|, \ldots, |x_n|)$. Dann folgt aus (a) sofort, dass $I = (x_1)$. □

Aus der Aussage (b) erhalten wir eine gute Beschreibung, welche K^o-Moduln flach sind. Dazu das

Lemma 2.4.7. *Sei $(K, |\cdot|)$ ein bewerteter Körper und M ein K^o-Modul. Sei $a \in K^\times$ mit $|a| < 1$. Dann gilt: M ist genau dann torsionsfrei, wenn M keine a-Torsion hat.*

Diese Aussage ist aus [Sch12b, Lemma 5.3. (i)]. Dabei hat ein K^o-Modul M keine a-Torsion, wenn aus $ax = 0$ mit $x \in M$ bereits $x = 0$ folgt.

Beweis von Lemma 2.4.7. Dass ein torsionsfreier K^o-Modul keine a-Torsion hat, ist trivial. Sei andersrum ein K^o-Modul M gegeben, der keine a-Torsion hat. Wir müssen zeigen, dass für $0 \neq b \in K^o$ und $x \in M$ aus $bx = 0$ bereits $x = 0$ folgt.
Da $\bigcap_i (a^i)K^o = 0$ gilt, gibt es $n \in \mathbb{N}$ und $c \in K^o$ mit $|c| > |a|$ so, dass $b = a^n c$ ist. Sei nun $x \in M$ mit $bx = 0 = (a^n c)x$. Da M keine a-Torsion hat, folgt $cx = 0$. Nach Lemma 2.4.6 können wir $a = dc$ mit $d \in K^o$ schreiben. Insbesondere ist $ax = d(cx) = 0$. Es folgt also $x = 0$. □

Der nächste Satz ist in dieser Form in der Literatur erstaunlicherweise schwer zu finden, obwohl die Aussage oft benutzt wird.

Satz 2.4.8. *Sei $(K, |\cdot|)$ ein bewerteter Körper, K^o sein Bewertungsring, sei $a \in K$ mit $0 < |a| < 1$. Ein K^o-Modul M ist genau dann flach über K^o, wenn er keine a-Torsion hat, genau dann, wenn er torsionsfrei ist.*

Beweis. Nach Lemma 2.4.7 reicht es zu zeigen, dass ein K^o-Modul M genau dann flach ist, wenn er torsionsfrei ist. Da nach Lemma 2.4.6 (b) jedes endlich erzeugte Ideal von K^o schon Hauptideal ist, folgt die Aussage aus [Bou61, chap. I, §2, Proposition 3 (ii)]. $\square$

2.5 Limites

In diesem Abschnitt geben wir zuerst die Definition eines projektiven Limes. Danach konstruieren wir für eine K^o-Algebra R und ein Element $0 \neq \varpi \in K^o$ die K-Algebra $R[\varpi^{-1}]$ und setzen eine Topologie von R mit Hilfe der direkten Limes-Topologie auf $R[\varpi^{-1}]$ fort. Wir werden beide Limites in Kapitel 4 brauchen.

Sei $(X_i, f_{i+1})_{i\in\mathbb{N}}$ ein projektives System von topologischen Räumen X_i mit stetigen Abbildungen $f_{i+1} : X_{i+1} \to X_i$ gegeben. Der projektive Limes dieses Systems ist durch

$$\varprojlim_i X_i = \left\{ (x_i)_{i\in\mathbb{N}} \in \prod_{i\in\mathbb{N}} X_i \;\middle|\; f_{i+1}(x_{i+1}) = x_i \text{ für alle } i \in \mathbb{N} \right\}$$

gegeben, zusammen mit der Teilraumtopologie des Produktes $\prod_i X_i$. Insbesondere gibt es die kanonischen, stetigen Projektionen $\pi_j : \varprojlim_i X_i \to X_j$.
Ist Y ein topologischer Raum, dann ist eine Abbildung $f : Y \to \varprojlim_i X_i$ genau dann stetig, wenn für alle $j \in \mathbb{N}$ die Verkettung $\pi_j \circ f : Y \to X_j$ stetig ist (vergleiche [Bou66, Chapter 1, § 4.4.]).

Sind die X_i nun topologische Gruppen (bzw. topologische Ringe) und die

$$f_{i+1} : X_{i+1} \to X_i$$

stetige Gruppen- (bzw Ring-)Homomorphismen, so ist $\varprojlim_i X_i$ eine topologische Gruppe (bzw. ein topologischer Ring) mit der folgenden Eigenschaft (siehe dazu [Bou66, Chapter 3, §7]):

Ist eine Gruppe (bzw. ein Ring) Y und Gruppen- (bzw. Ring)-Homomorphismen
$g_i : Y \to X_i$ mit $f_{i+1} \circ g_{i+1} = g_i$ gegeben, so existiert genau ein Gruppen- (bzw. Ring)-Homomorphismus $g : Y \to \varprojlim_i X_i$ mit $\pi_j \circ g_j = g$ für alle $j \in \mathbb{N}$.

Bemerkung 2.5.1. Die Konstruktion des projektiven Limes funktioniert genau so auch für Monoide.

Wir führen noch den Begriff der a-Vollständigkeit ein, den wir in Abschnitt 4.3 brauchen. Er ist aus der Tatsache motiviert, dass es einen topologischen Isomorphismus

$$\mathbb{Z}_p \cong \varprojlim_n \mathbb{Z}/p^n$$

gibt, wobei man $\mathbb{Z}/p^n$ jeweils die diskrete Topologie versieht. Die p-adische Topologie ist nämlich von den Idealen (p^n) erzeugt. Ist die Topologie eines Ringes von Idealen $\mathfrak{a}^n$ erzeugt, so nennt man diese gemeinhin $\mathfrak{a}$-adische Topologie. Die Vervollständigung eines solchen Ringes ist durch $\varprojlim_n A/\mathfrak{a}^n$ gegeben. Siehe dazu [AM69, Chapter 10]. Ist nun A ein Ring und $a \in A$, so erzeugen die Ideale (a^n) die a-adische Topologie. Der Ring A ist genau dann vollständig, wenn $A \cong \varprojlim_n A/a^n$. Wir haben also

Definition 2.5.2. Sei A ein beliebiger kommutativer Ring mit 1 und $a \in A$. Wir betrachten das projektive System $A/a^{n+1} \to A/a^n$ der kanonischen Ringhomomorphismen und erhalten den projektiven Limes $\varprojlim_n A/a^n$, sowie eine kanonische Abbildung $A \to \varprojlim_n A/a^n; x \mapsto (\bar{x}, \bar{x}, \ldots)$. Ist

$$A \cong \varprojlim_n A/a^n$$

isomorph via dieser Abbildung, so nennen wir den Ring *a-vollständig.*

Beispiel 2.5.3. Jeder Ring A ist offensichtlich 0-vollständig.

Lemma 2.5.4. *Sei K ein bewerteter Körper und R eine normierte K-Algebra, sodass der Ring der potenzbeschränkten Elemente R^o in R beschränkt ist. Sei $a \in K^\times$ mit $|a| < 1$. Dann ist R genau dann vollständig, wenn R^o bereits a-vollständig ist.*

Beweis. Wir zeigen zuerst, dass die kanonische Abbildung $R^o \to \varprojlim R^o/a^n$ immer injektiv ist. Sei dazu $x \in R^o$ mit $(\bar{x}, \bar{x}, \ldots) = 0$ in $\varprojlim R^o/a^n$ dann gilt $x \in \bigcap_n a^n R^o$. Inbesondere gibt es, da R^o beschränkt ist, ein $\varepsilon > 0$ mit $|x| \leq |a|^n \varepsilon$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Daraus folgt $x = 0$ und Injektivität ist gezeigt.
Wir wissen schon, dass R genau dann vollständig ist, wenn R^o vollständig ist (Lemma 2.3.14). Sei also zunächst R^o vollständig. Zu zeigen ist Surjektivität der kanonischen Abbildung. Sei ein $(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots) \in \varprojlim R^o/a^n$ gegeben. Seien $x_i \in R^o$ Lifts der $\bar{x}_i$. Sei nun $\delta > 0$ und $n \in \mathbb{N}$ so, dass $|a^n|\varepsilon < \delta$. Dann ist für $m > n$ per Definition $(x_{m+1} - x_m) \in a^m R^o \subset a^n R^o$. Wegen

$$|x_{m+1} - x_m| \leq |a^n|\varepsilon < \delta$$

ist $(x_n)_n$ also eine Cauchyfolge. Sei $x \in R^o$ ihr Grenzwert und $n \in \mathbb{N}$, dann gibt es ein $m \geq n$ mit $|x - x_m| \leq |a^n|$. Wegen $B(0;1) \subset R^o$ heißt das $a^{-n}(x - x_m) \in R^o$. Daher ist $(x - x_m) \in a^n R^o$ und wegen $(x_m - x_n) \in a^n R^o$ folgt

$$(x - x_n) = (x - x_m) + (x_m - x_n) \in a^n R^o.$$

Der Grenzwert x ist also das Urbild von $(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots)$ unter $R^o \to \varprojlim R^o/a^n$.
Sei R^o umgekehrt a-vollständig und $(x_n)_n$ eine Cauchyfolge. Induktiv können wir eine Teilfolge $(x_{n_i})_i$ mit $|x_{i+1} - x_i| \leq |a^i|$ wählen. Wie oben sehen wir, dass $(\bar{x}_{n_1}, \bar{x}_{n_2}, \ldots)$ ein Element in $\varprojlim R^o/a^n$ definiert. Sei x sein Urbild. Es reicht zu zeigen, dass die Teilfolge gegen x konvergiert. Dies folgt aber wegen $|x - x_{n_i}| \leq |a^i|\varepsilon$ sofort. $\square$

Sei A ein Ring und M ein A-Modul. Sei $0 \neq \varpi \in A$ ein Element, sodass M keine ϖ-Torsion hat. Wir definieren

$$M[\varpi^{-1}] = S^{-1}M$$

als Lokalisierung von M an der Menge $S = \{ \varpi^n \mid n \in \mathbb{N} \}$. Auf der anderen Seite können wir die Moduln $\varpi^{-n}M$ zusammen mit den A-Modul-Morphismen

$$f_{n+1} : \varpi^{-n}M \to \varpi^{-n-1}M,$$

die via $\varpi^{-n}x \mapsto \varpi^{-n-1}(\varpi x)$ definiert sind, betrachten. Da M keine ϖ-Torsion hat, sind die f_n injektiv und wir erhalten

$$\varinjlim_n \varpi^{-n}M = \bigcup_n \varpi^{-n}M,$$

indem wir auf der rechten Seite $\varpi^{-n}M$ mit seinem Bild in $\varpi^{-n-1}M$ identifizieren. Weiterhin erhalten wir via $(x/\varpi^n) \mapsto \varpi^{-n}x$ eine Identifizierung

$$M[\varpi^{-1}] = \bigcup_n \varpi^{-n}M$$

als A-Moduln.

Bemerkung 2.5.5. Ist eine Topologie auf M gegeben, so statten wir $\varpi^{-n}M$ mit der Topologie aus, sodass $M \to \varpi^{-n}M; x \mapsto \varpi^{-n}x$ ein Homöomorphismus ist und betrachten $M[\varpi^{-1}]$ immer mit der davon induzierten direkten Limes-Topologie. Das heißt eine Menge $U \subset M[\varpi^{-1}]$ ist genau dann offen, wenn für alle $n \in \mathbb{N}$ die Menge $\varpi^n(U \cap \varpi^{-n}M) = (\varpi^n U) \cap M \subset M$ offen ist.

Bemerkung 2.5.6. Im Allgemeinen sind nach [TSH98, Example 1.2] direkte Limites topologischer Gruppen keine topologischen Gruppen, aber Invertieren und Translation sind stetig ([TSH98, Proposition 1.1]).

Es folgt nun eine Aussage, die wir in Abschnitt 4.3 benutzen. Wir formulieren und beweisen sie an dieser Stelle, um den späteren Lesefluss nicht zu stören.

Satz 2.5.7. *Sei K ein bewerteter Körper und R eine normierte K-Algebra. Sei $\varpi \in K^\times$ mit $|\varpi| < 1$, dann gibt es einen K-Algebra-Homöomorphismus*

$$R^o[\varpi^{-1}] = R,$$

wobei wir auf der linken Seite die direkte Limes-Topologie betrachten. Insbesondere ist $(R^o[\varpi^{-1}])^o = R^o$.

Beweis. Da R nach Lemma 2.1.13 torsionsfrei über K ist, definiert $(y/\varpi^n) \mapsto \varpi^{-n}y$ einen injektiven Ringhomomorphismus $f : R^o[\varpi^{-1}] \to R$. Wir zeigen Surjektivität: Sei $x \in R$, dann gibt es ein $n \in \mathbb{N}$ mit $|x| \leq |\varpi|^{-n}$. Daraus folgt, dass $y = \varpi^n x \in \bar{B}(0; 1) \subset R^o$ und

x das Bild von (y/ϖ^n) unter f ist.
Da insbesondere also $K \cong K^o[\varpi^{-1}]$ gilt, ist der Ringhomomorphismus $R^o[\varpi^{-1}] \ \to R$ auf kanonische Weise ein K-Algebra-Morphismus.
Um zu zeigen, dass $f : R^o[\varpi^{-1}] \to R$ ein Homöomorphismus ist, reicht es wegen Bemerkung 2.5.6 zu zeigen, dass $U \subset R^o[\varpi^{-1}]$ genau dann eine Umgebung der 0 in $R^o[\varpi^{-1}]$ ist, wenn $f(U)$ eine Umgebung der 0 in R ist.
Da $R^o \subset R$ offen ist, folgt aus Bemerkung 2.2.20, dass auch alle Mengen $\varpi^n R^o$ offen sind; das heißt R^o ist auch in $R^o[\varpi{-}1]$ offen. Wir können also ohne Einschränkung annehmen, dass $U \subset R^o$ gilt. Ist U in $R^o[\varpi]$ offen, dann ist nach Definition der direkten Limes-Topologie $f(U)$ auch in R^o offen. Ist umgekehrt $f(U) \subset R^o$ offen, dann sind wiederum nach Bemerkung 2.2.20 auch $f(\varpi^n U) \subset R^o$ offen. Also ist nach Definiton auch U in $R^o[\varpi^{-1}]$ offen. □

Korollar 2.5.8. *Setzt man in der Situation des obigen Satzes die K^o-Algebra-Norm von R^o via $|x/\varpi^n| = |x|\ |\varpi|^{-n}$ zu einer K-Algebra-Norm auf $R^o[\varpi^{-1}]$ fort, so ist die davon induzierte Topologie gerade die direkte Limes-Topologie von $R^o[\varpi^{-1}]$.*

Beweis. Man überprüft, dass allgemein $|x/\varpi^{-n}| = |x||\varpi|^{-n}$ tatsächlich eine K-Algebra-Norm auf $R^o[\varpi^{-1}]$ definiert, wenn eine K^o-Algebra-Norm $|\cdot|$ auf R^o gegeben ist. Man sieht sofort, dass auch mit dieser Topologie der Isomorphismus $R^o[\varpi{-}1] \to R$ ein Homöomorphismus ist. Dann folgt mit obigem Satz sofort, dass die beiden Topologien auf $R^o[\varpi^{-1}]$ übereinstimmen. □

3 Almost Ring Theory

Dieses Kapitel ist im Wesentlichen eine ausführliche Ausarbeitung von Aussagen aus dem Buch *Almost Ring Theory* von Gabber und Ramero ([GR03]). Teilweise beweisen wir Aussagen, die nur implizit genannt werden, und für die deshalb manchmal keine Referenz gegeben sind. Insgesamt sind die Beweise in [GR03] Beweise sehr kompakt oder teilweise ganz ausgelassen. Der Leser, der in Lokalisieren von abelschen Kategorien und Tensorkategorien nicht bewandert ist, findet in diesem Kapitel eine Darstellung, die ihm den Einstieg in die Almost Ring Theory erleichtern möchte. Das Ziel ist es, alle Aussagen aus der Almost Ring Theory, die wir in Kapitel 4 verwenden, hier zu beweisen.
In Abschnitt 3.1 werden Fast-Isomorphismen und ihre Charakterisierung eingeführt; in Abschnitt 3.2 wird die Kategorie der Fast-Moduln definiert, die Lokalisierung von Moduln an Fast-Isomorphismen ist. In Abschnitt 3.3 definieren wir, was eine Tensorkategorie ist und zeigen, dass die Kategorie der Fast-Moduln eine Tensorkategorie ist. In Abschnitt 3.4 stellen wir schließlich den Funktor der Fast-Elemente vor, der zum Lokalisierungsfunktor lokalisiert ist.

In diesem Abschnitt sei V ein kommutativer Ring und $\mathfrak{m} \subset V$ ein Ideal, für das

$$\mathfrak{m}^2 = \mathfrak{m}$$

gilt. Wir verwenden folgende Notation:

$$\widetilde{\mathfrak{m}} = \mathfrak{m} \otimes_V \mathfrak{m}$$

und für einen V-Modul M schreiben wir

$$\widetilde{M} = \widetilde{\mathfrak{m}} \otimes_V M.$$

Die Uneindeutigkeit dieser Schreibweise für $M = \mathfrak{m}$ löst sich auf, da es einen kanonischen Isomorphismus

$$\widetilde{\mathfrak{m}} \otimes_V \mathfrak{m} \cong \widetilde{\mathfrak{m}}$$

gibt (Beispiel 3.1.2 (5) zusammen mit Satz 3.1.4 (b)).
Sind zwei V-Moduln M, N und eine V-lineare Abbildung $f : M \to N$ gegeben, so schreiben wir

$$\widetilde{f} = 1_{\widetilde{\mathfrak{m}}} \otimes_V f : \widetilde{\mathfrak{m}} \otimes_V M = \widetilde{M} \longrightarrow \widetilde{\mathfrak{m}} \otimes_V N = \widetilde{N}.$$

Wir werden die Almost Ring Theory in dieser Arbeit auf den Fall anwenden, dass V der Bewertungsring K^o eines nicht-diskret bewerteten Körpers K ist und $\mathfrak{m}$ das maximale Ideal. Wir haben gesehen, dass in diesem Fall $\mathfrak{m}^2 = \mathfrak{m}$ gilt (Lemma 2.4.5). Außerdem ist $\mathfrak{m}$ ein flacher K^o-Modul (Satz 2.4.8).

Allgemein gilt folgende Aussage für $(V, \mathfrak{m})$:

Lemma 3.0.9 ([GR03, S. 12])**.** *Ist* $\mathfrak{m}$ *ein flacher* V*-Modul, dann induziert die kanonische Abbildung*

$$\widetilde{\mathfrak{m}} = \mathfrak{m} \otimes_V \mathfrak{m} \to \mathfrak{m} \quad ; \quad b \otimes c \mapsto bc$$

einen Isomorphismus.

Beweis. Da $\mathfrak{m}$ flach ist, induziert $\mathfrak{m} \to V$ eine Injektion $\mathfrak{m} \otimes \mathfrak{m} \to \mathfrak{m} \otimes_V V \cong \mathfrak{m}$ via $b \otimes c \mapsto bc$. Ihr Bild ist gerade $\mathfrak{m}^2 = \mathfrak{m}$. □

3.1 Fast-Isomorphismen

Wir beginnen mit der grundlegenden

Definition 3.1.1 ([GR03, 2.1.3])**.** Seien M, N zwei V-Moduln.

(i) M heißt *fast-null*, wenn $\mathfrak{m}M = 0$ gilt.

(ii) Eine V-lineare Abbildung $f : M \to N$ heißt *Fast-Isomorphismus*, wenn der Kern und der Cokern der Abbildung fast-null sind; also $\mathfrak{m}\ker(f) = \mathfrak{m}\operatorname{coker}(f) = 0$.

Wir geben erste, einfache Beispiele an.

Beispiel 3.1.2.

(1) Jeder V-Modul-Isomorphismus ist trivialerweise ein Fast-Isomorphismus.

(2) Der V-Modul $V/\mathfrak{m}$ ist fast-null. Insbesondere ist der Restklassenkörper $K^o/\mathfrak{m}$ eines nicht-diskret bewerteten Körpers K fast-null.

(3) Daraus folgt direkt, dass die Einbettung $\mathfrak{m} \to V$ ein Fast-Isomorphismus ist.

(4) Für jeden V-Modul M ist die Einbettung $\mathfrak{m}M \to M$ ein Fast-Isomorphismus.

(5) Die kanonische Abbildung

$$k : \mathfrak{m} \otimes_V M \to M \quad ; \quad b \otimes x \mapsto bx$$

ist ein Fast-Isomorphismus: Der Cokern ist gerade $M/(\mathfrak{m}M)$, also fast-null.
Sei $\sum b_i \otimes x_i \in \ker(k)$ mit $b_i \in \mathfrak{m}$ und $x_i \in M$. Ist $b \in \mathfrak{m}$, so ergibt sich

$$b(\sum b_i \otimes x_i) = \sum bb_i \otimes x_i = \sum b \otimes b_i x_i = b \otimes (\sum b_i x_i) = b \otimes 0 = 0.$$

Also ist $\mathfrak{m}\ker(k) = 0$ und k tatsächlich ein Fast-Isomorphismus.

(6) Auch die kanonische Abbildung

$$k_M : \widetilde{M} = \widetilde{\mathfrak{m}} \otimes_V M \to M \quad ; \quad b_1 \otimes b_2 \otimes x \mapsto b_1 b_2 x$$

ist ein Fast-Isomorphismus. Dies folgt mit direkter Berechnung oder aus Korollar 3.1.5 und der Tatsache, dass k_M die Verknüpfung zweier Abbildungen der Form k aus (5) ist.

(7) Ein V-Modul M ist genau dann fast-null, wenn $0 \to M$ ein Fast-Isomorphismus ist.

Wir haben folgende Beobachtung für unseren Fall $(V, \mathfrak{m}) = (K^o, \mathfrak{m})$.

Satz 3.1.3. *Sei K ein nicht-diskret bewerteter Körper. Seien R, S normierte K-Algebren mit beschränkten Mengen R^o, S^o der potenzbeschränkten Elemente.*
Sei $f : R \to S$ ein K-Algebra-Morphismus, sodass $f(R^o) \subset S^o$. Ist $f_{|R^o} : R^o \to S^o$ als K^o-Algebra-Morphismus ein Fast-Isomorphismus, dann ist $f : R \to S$ ein Homöomorphismus.

Beweis. Wir zeigen zuerst Injektivität und Surjektivität der Abbildung. Sei $x \in R$ mit $f(x) = 0$ gegeben. Es existiert ein $b \in K^\times$ so, dass $bx \in R^o$: weil die Bewertung auf K nicht-trivial ist, können wir nämlich ein $b \in K^\times$ mit $|b^{-1}| > |x|$ wählen. Es ist $f(bx) = bf(x) = 0$. Sei nun $0 \neq c \in \mathfrak{m}$ beliebig, dann ist nach Voraussetzung $cbx = 0$ und da R als normierte K-Algebra torsionsfrei ist, folgt bereits $x = 0$.
Sei auf der anderen Seite $y \in S$, dann gibt es ein $b \in K^\times$ mit $by \in S^o$ und nach Voraussetzung gibt es für beliebiges $0 \neq c \in \mathfrak{m}$ ein $x \in R^o$ mit $f(x) = cby$. Es ist also $f(b^{-1}c^{-1}x) = y$. Damit ist $f : R \to S$ injektiv und surjektiv.
Die Stetigkeit von f folgt aus Satz 2.2.18 und der Bedingung $f(R^o) \subset S^o$. Wir müssen wiederum nach Satz 2.2.18 nur noch zeigen, dass $f^{-1}(S^o) \subset R^o$ gilt. Sei $f(x) = y \in S^o$, dann gilt wegen der Fast-Surjektivität von $f_{|R^o}$ für alle $c \in \mathfrak{m}$ bereits $cy = f(x')$ mit $x' \in R^o$. Aus Injektivät von f folgt $cx = x' \in R^o$. Da R^o nach Voraussetzung beschränkt ist, gibt es ein $\varepsilon > 0$ sodass für alle $c \in \mathfrak{m}$ und alle $n \in \mathbb{N}$ bereits $|c^n x^n| < \varepsilon$ gilt. Da K nicht-diskret bewertet ist, gibt es für alle $n \in \mathbb{N}$ ein $c \in \mathfrak{m}$ mit $|c| > 1/2^{1/n}$. Daraus folgt, dass für alle $n \in \mathbb{N}$

$$|x^n| = |c^{-n}||c^n x^n| < 2\varepsilon$$

gilt. Daher ist $x \in R^o$. □

Wenn wir weiter in der Sprache des Beispiels $(V, \mathfrak{m}) = (K^o, \mathfrak{m})$ bleiben, könnten wir grob gesagt sagen, dass eine Aussage fast-wahr ist, wenn wir sie beliebig kleiner skalieren und sie dann wahr ist. Ist R nun eine K-Algebra, ist Skalieren invertierbar, weshalb dann fast-wahr das gleiche ist wie wahr.

Es gibt eine gute Charakterisierung von fast-null Moduln und Fast-Isomorphismen, mit der wir später die Lokalisierung an den Fast-Isomorphismen beschreiben können.

Satz 3.1.4 ([GR03, Remark 2.1.4. (i)]). *Seien M, N zwei V-Moduln. Dann gilt:*

(a) M ist genau dann fast-null, wenn $\mathfrak{m} \otimes_V M = 0$ ist.

(b) Eine V-lineare Abbildung $f : M \to N$ ist genau dann ein Fast-Isomorphismus, wenn die induzierte Abbildung $1 \otimes f : \widetilde{\mathfrak{m}} \otimes_V M \to \widetilde{\mathfrak{m}} \otimes_V N$ ein Isomorphismus ist.

Der Beweis dieses Satzes wird in [GR03] dem Leser überlassen. Wir führen den Beweis für Teil (b) hier nur für den Fall, dass $\widetilde{\mathfrak{m}} = \mathfrak{m}$ flach ist. Der interessierte Leser findet einen Beweis für den allgemeinen Fall im Anhang Seite 89

Beweis von Satz 3.1.4.

(a) Die kanonische Abbildung $\mathfrak{m} \otimes_V M \to \mathfrak{m}M$ ist surjektiv. Daher folgt aus $\mathfrak{m} \otimes_V M = 0$ bereits $\mathfrak{m}M = 0$ und M ist fast null. Sei umgekehrt $\mathfrak{m}M = 0$ und ein Erzeuger $b \otimes x$ von $\mathfrak{m} \otimes_V M$ gegeben. Wegen $\mathfrak{m} = \mathfrak{m}^2$ gibt es $b_1, b_2 \in \mathfrak{m}$ mit $b_1 b_2 = b$. Nach Voraussetzung ist $b_2 x = 0$. Es ist also

$$b \otimes x = (b_1 b_2) \otimes x = b_1 \otimes (b_2 x) = 0.$$

(b) Sei $\widetilde{\mathfrak{m}} = \mathfrak{m}$ flach: Die exakte Sequenz

$$0 \to \ker(f) \to M \to N \to \operatorname{coker}(f) \to 0$$

induziert also eine exakte Sequenz

$$0 \to \mathfrak{m} \otimes_V \ker(f) \to \mathfrak{m} \otimes_V M \to \mathfrak{m} \otimes_V N \to \mathfrak{m} \otimes_V \operatorname{coker}(f) \to 0.$$

Ist f ein Fast-Isomorphismus, so ist $\mathfrak{m} \ker(f) = 0 = \mathfrak{m} \operatorname{coker}(f)$. Nach (a) ist dann $\mathfrak{m} \otimes_V \ker(f) = 0 = \mathfrak{m} \otimes_V \operatorname{coker}(f)$, woraus folgt, dass $1 \otimes_V f$ ein Isomorphismus ist. Sei umgekehrt $1 \otimes_V f$ ein Isomorphismus, dann folgt $\mathfrak{m} \otimes_V \ker(f) = 0 = \mathfrak{m} \otimes_V \operatorname{coker}(f)$ und wieder mit (a), dass f ein Fast-Isomorphismus ist. □

Korollar 3.1.5. *Seien M, N, P drei V-Moduln und $f : M \to N$ und $g : N \to P$ zwei V-lineare Abbildungen. Sind f und g Fast-Isomorphismen, so ist auch $g \circ f : M \to P$ ein Fast-Isomorphismus.*

Beweis. Dies folgt sofort aus Satz 3.1.4 und der Tatsache, dass $(1 \otimes_V g) \circ (1 \otimes_V f) = 1 \otimes_V (gf) : \widetilde{\mathfrak{m}} \otimes_V M \to \widetilde{\mathfrak{m}} \otimes_V P$ gilt. □

Es folgen nun weitere Beobachtungen.

Lemma 3.1.6. *Seien M, N zwei V-Moduln und $f : M \to N$ eine V-lineare Abbildung. Dann gilt:*

(a) $k_N \circ \widetilde{f} = f \circ k_M$, *und*

(b) $\widetilde{k_M} = k_{\widetilde{M}}$; *inbesondere ist* $k_{\widetilde{M}}$ *ein Isomorphismus.*

Aussage (a) besagt also, dass das folgende Diagramm kommutiert.

$$\begin{tikzcd}
\widetilde{\mathfrak{m}} \otimes_V M = \widetilde{M} \arrow[r, "\widetilde{f}"] \arrow[d, "k_M"] & \widetilde{N} = \widetilde{\mathfrak{m}} \otimes_V N \arrow[d, "k_N"] \\
M \arrow[r, "f"] & N
\end{tikzcd}$$

Zusammen mit (b) ergibt sich dann, dass ein Fast-Isomorphismus $g : \widetilde{M} \to \widetilde{N}$ schon ein Isomorphismus ist:

$$\begin{tikzcd}
\widetilde{\widetilde{M}} \arrow[r, "\widetilde{g}"] \arrow[d, "k_{\widetilde{M}}"] & \widetilde{\widetilde{N}} \arrow[d, "k_{\widetilde{N}}"] \\
\widetilde{M} \arrow[r, "g"] & \widetilde{N}
\end{tikzcd}$$

Beweis. (a) Es ist

$$k_N(\widetilde{f}(\tilde{b} \otimes x)) = k_N(\tilde{b} \otimes f(x)) = b_1 b_2 f(x) = f(b_1 b_2 x) = f(k_M(\tilde{b} \otimes x))$$

für $\tilde{b} = b_1 \otimes b_2 \in \widetilde{\mathfrak{m}}, x \in M$.

(b) Mit Notationen analog zu oben ergibt sich

$$\begin{aligned}
\widetilde{k_M}(\tilde{b} \otimes (\tilde{c} \otimes x)) = \tilde{b} \otimes k_M(\tilde{c} \otimes x) = \tilde{b} \otimes c_1 c_2 x \quad &= \quad b_1 c_1 \otimes b_2 c_2 \otimes x = \\
= b_1 b_2 (\tilde{c} \otimes x) \quad &= \quad k_{\widetilde{M}}(\tilde{b} \otimes (\tilde{c} \otimes x)).
\end{aligned}$$

Mit Satz 3.1.4 (b) ist klar, dass $k_{\widetilde{M}}$ ein Isomorphismus ist. $\square$

Das folgende Lemma ist eine Aussage von [GR03, S. 17], wie üblich dort ohne Beweis. Dieser ist aber entweder durch direkte Berechnung oder mit unseren Vorüberlegungen nicht schwer.

Lemma 3.1.7. *Für einen V-Modul M gilt*

$$\mathfrak{m}\widetilde{M} = \widetilde{M}.$$

Beweis. Nach obigem Lemma ist $k_{\widetilde{M}} : \widetilde{\widetilde{M}} \to \widetilde{M}$ ein Isomorphismus. Sein Bild ist gerade $\mathfrak{m}^2\widetilde{M} = \mathfrak{m}\widetilde{M}$. □

3.2 Die Kategorie der Fast-Moduln V^a-Mod

Wir werden in diesem Abschnitt die Kategorie der V-fast-Moduln ad hoc definieren und danach zeigen, dass dies die Lokalisierung von V-**Mod** an den Fast-Isomorphismen ist. Für eine Motivation der ad hoc Konstruktion sowie allgemeine Aussagen verweisen wir auf [GR03, 2.2.2], [Bor94] und [Gab62]. In letzterem wird auch gezeigt, dass die Lokalisierung von abelschen Kategorien an geeigneten Morphismenmengen wieder eine abelsche Kategorie ist. Wir werden dies in diesem Abschnitt aber direkt zeigen, und so sehen, wie Kern und Cokern aussehen.
Mit der gleichen Methode kann man dann zeigen, dass der Lokalisierungsfunktor exakt ist. Wie wir aber in Abschnitt 3.4 sehen werden, hat der Lokaliserungsfunktor einen Rechts- und Linksadjungierten. Dann folgt die Exaktheit aus einem allgemeinen Resultat der Kategorientheorie.

Definition 3.2.1. Wir definieren die Kategorie V^a-**Mod** der *V-fast-Moduln*, indem wir für die Objekte $\mathrm{Ob}(V^a\text{-}\mathbf{Mod}) = \mathrm{Ob}(V\text{-}\mathbf{Mod})$ setzen. Wir schreiben $M = M_0^a$ für ein Objekt aus V^a-**Mod** mit $M_0 \in \mathrm{Ob}(V\text{-}\mathbf{Mod})$. Für die Mengen der Morphismen setzen wir

$$\mathrm{Hom}_{V^a\text{-}\mathbf{Mod}}(M_0^a, N_0^a) = \mathrm{Hom}_{V\text{-}\mathbf{Mod}}(\widetilde{M_0}, \widetilde{N_0}),$$

und die Verknüpfung zweier Morphismen $f : M_0^a \to N_0^a$ und $g : N_0^a \to P_0^a$ ist durch $g \circ_{V^a} f = g \circ_V f$ definiert.

Der folgende Satz besagt, dass V^a-**Mod** eine Lokalisierung von V-**Mod** an den Fast-Isomorphismen ist.

Satz 3.2.2. *Sei $(\cdot)^a : V\text{-}\boldsymbol{Mod} \to V^a\text{-}\boldsymbol{Mod}$ der Funktor, der via $(\cdot)^a : M \mapsto M^a$ und $(\cdot)^a : f \mapsto f^a = \widetilde{f} \in \mathrm{Hom}_{V^a\text{-}\boldsymbol{Mod}}(M^a, N^a) = \mathrm{Hom}_{V\text{-}\boldsymbol{Mod}}(\widetilde{M}, \widetilde{N})$ definiert ist. Dann gilt:*

*(a) Ist $f \in \mathrm{Morph}(V\text{-}\boldsymbol{Mod})$ ein Fast-Isomorphismus, so ist f^a ein Isomorphismus in V^a-**Mod**.*

*(b) Sei $\mathcal{B}$ eine Kategorie und $F : V\text{-}\boldsymbol{Mod} \to \mathcal{B}$ ein Funktor, sodass für jeden Fast-Isomorphismus f in V-**Mod** der Morphismus $F(f)$ ein Isomorphismus in $\mathcal{B}$ ist. Dann gibt es einen eindeutigen Funktor $F' : V^a\text{-}\boldsymbol{Mod} \to \mathcal{B}$ so, dass $F' \circ (\cdot)^a = F$ ist.*

$$\begin{tikzcd} V\text{-}\mathbf{Mod} \arrow[rr, "F"] \arrow[dr, "(\cdot)^a"'] & & \mathcal{B} \\ & V^a\text{-}\mathbf{Mod} \arrow[ur, "F'"'] & \end{tikzcd}$$

Beispiel 3.2.3. Für den Fall $V = K^o$ wird in [Sch12b, S. 268] bemerkt, dass es einen Funktor K^{oa}-**Mod** $\to K$-**Mod** gibt, der verknüpft mit dem Lokalisierungsfunktor

$$K^o\text{-}\mathbf{Mod} \to K^{oa}\text{-}\mathbf{Mod}$$

gerade der Erweiterungsfunktor K^o-**Mod** $\to K$-**Mod** ist. Der Erweiterungsfunktor ist durch Erweitern von Skalaren (siehe [AM69, S. 28]) gegeben:

$$E : K^o\text{-}\mathbf{Mod} \to K\text{-}\mathbf{Mod} \quad ; \quad M \mapsto K \otimes_{K^o} M \quad ; \quad f \mapsto 1_K \otimes_{K^o} f.$$

Nach obigem Satz reicht es zu zeigen, dass $1_K \otimes_{K^o} f$ ein Isomorphismus ist, wenn $f : M \to N$ ein Fast-Isomorphismus ist. Da K torsionsfreier K^o-Modul, also insbesondere flacher K^o-Modul ist, ist die kanonische Abbildung $\mathfrak{m} \otimes_{K^o} K \to K^o \otimes_{K^o} K \cong K$ injektiv. Sei $b \in \mathfrak{m}$, dann können wir jedes $c \in K$ als $c = b(b_1 c)$ mit $b_1 \in K$ schreiben. Daher ist die Abbildung auch surjektiv und wir erhalten $\mathfrak{m} \otimes_{K^o} K \cong K$. Weiterhin ist $\mathfrak{m} \otimes_{K^o} M \cong \mathfrak{m} \otimes_{K^o} N$ nach Voraussetzung (Satz 3.1.4). Also ist $K \otimes M \to K \otimes N$ ein Isomorphismus.

Wir führen folgende Notation ein:
Wenn wir im Folgenden einen V^a-Moduln M haben, so gibt es per Konstruktion immer einen V-Modul M_0 mit $M = M_0^a$. Wir schreiben deshalb zum Beispiel

$$\mathrm{Hom}_{V^a\text{-}\mathbf{Mod}}(M, N) = \mathrm{Hom}_{V\text{-}\mathbf{Mod}}(\widetilde{M_0}, \widetilde{N_0})$$

ohne explizit $M = M_0^a$ und $N = N_0^a$ zu erwähnen. Eine Ausnahmen bildet der Ring V selbst: wir schreiben stets V^a und nicht etwa $V^a = V_0^a$.
Weiterhin schreiben wir $\mathrm{Hom}_{V^a} = \mathrm{Hom}_{V^a\text{-}\mathbf{Mod}}$ und $\mathrm{Hom}_V = \mathrm{Hom}_{V\text{-}\mathbf{Mod}}$ und meinen damit immer Modul-Morphismen. Später gibt es einen Funktor $(\cdot)_* : V^a$-**Mod** $\to V$-**Mod** und wir schreiben der Lesbarkeit wegen

$$M_*^a = (M_*)^a = ((\cdot)^a \circ (\cdot)_*)(M).$$

Beweis von Satz 3.2.2. Es ist klar, dass $(\cdot)^a$ tatsächlich einen Funktor definiert, da die Zuordnung $f \mapsto \widetilde{f} = 1_{\widetilde{\mathfrak{m}}} \otimes_V f$ in V-**Mod** funktoriell ist.

(a) Die Aussage folgt sofort aus Satz 3.1.4 (b).

(b) Wir betrachten zunächst einen beliebigen Morphismus
$f \in \mathrm{Hom}_{V^a}(M, N) = \mathrm{Hom}_V(\widetilde{M_0}, \widetilde{N_0})$ und das Diagramm, deren Pfeile Morphismen in V-**Mod** sind:

$$\begin{tikzcd}
\widetilde{\widetilde{M_0}} \arrow[r, "\tilde{f}"] \arrow[d, "k_{\widetilde{M_0}}"] & \widetilde{\widetilde{N_0}} \arrow[d, "k_{\widetilde{N_0}}"] \\
\widetilde{M_0} \arrow[r, "f"] & \widetilde{N_0}
\end{tikzcd}$$

Nach Lemma 3.1.6 kommutiert das Diagramm und die vertikalen Pfeile sind Isomorphismen. Wir erhalten also ein kommutatives Diagramm in V^a-**Mod**, dessen vertikale Pfeile Isomorphismen sind:

$$\begin{tikzcd}
(\widetilde{M_0})^a \arrow[r, "f^a"] \arrow[d, "k^a_{M_0}"] & (\widetilde{N_0})^a \arrow[d, "k^a_{N_0}"] \\
M \arrow[r, "f"] & N
\end{tikzcd}$$

Sei nun ein Funktor $F : V\text{-}\mathbf{Mod} \to \mathcal{B}$ gegeben, sodass für alle Fast-Isomorphismen $g \in \mathrm{Morph}(V\text{-}\mathbf{Mod})$ der Morphismus $F(g)$ ein Isomorphismus in $\mathcal{B}$ ist. Angenommen, es gibt einen Funktor $F' : V^a\text{-}\mathbf{Mod} \to \mathcal{B}$ mit $F' \circ (\cdot)^a = F$, so folgt aus obigem Diagramm

$$F'(f) \circ F(k_{M_0}) = F'(f \circ k^a_{M_0}) = F'(k^a_{N_0} \circ f^a) = F(k_{N_0}) \circ F(f).$$

Die kanonische Abbildung k_{M_0} bzw. k_{N_0} ist ein Fast-Isomorphismus. Nach Voraussetzung ist also $F(k_{M_0})$ Isomorphismus in $\mathcal{B}$ und es ergibt sich

$$F'(f) = F(k_N) \circ F(f) \circ F(k_M)^{-1},$$

wobei f links den Morphismus $f : M \to N$ in V^a-**Mod** bezeichnet und rechts den Morphismus $f : \widetilde{M_0} \to \widetilde{N_0}$ in V-**Mod**. Daraus folgt die Eindeutigkeit des Funktors und die Existenz folgt aus der Tatsache, dass obige Gleichung zusammen mit $F'(M_0^a) = F(M_0)$ einen Funktor definiert. $\square$

Wir wollen nun direkt zeigen, dass V^a-**Mod** eine abelsche Kategorie ist. Dass der Funktor $(\cdot)^a : V\text{-}\mathbf{Mod} \to V^a\text{-}\mathbf{Mod}$ exakt ist, folgt aus der Tatsache, dass er Links- und Rechtsadjungierte hat; siehe dazu Satz 3.4.20.

Satz 3.2.4. *Die Kategorie V^a-**Mod** ist eine abelsche Kategorie.*

Wir benötigen das

Lemma 3.2.5. *Seien M_0, N_0 zwei V-Moduln und $g : \widetilde{M_0} \to N_0$ ein Morphismus in V-**Mod**. Dann gibt es einen eindeutigen Morphismus $g' : \widetilde{M_0} \to \widetilde{N_0}$ in V-**Mod**, sodass $k_{N_0} \circ g' = g$ gilt.*

Beweis. Betrachte das folgende, kommutative Diagramm.

$$\begin{tikzcd}
\widetilde{\widetilde{M_0}} \arrow[d, "k_{\widetilde{M_0}}"'] \arrow[dr, "\widetilde{g}"] & \\
\widetilde{M_0} \arrow[dr, "g"] & \widetilde{N_0} \arrow[d, "k_{N_0}"] \\
& N_0
\end{tikzcd}$$

Da $k_{\widetilde{M_0}}$ ein Isomorphismus ist, können wir $g' = \widetilde{g} \circ (k_{\widetilde{M_0}})^{-1}$ setzen und erhalten $k_{N_0} \circ g' = g$.
Für die Eindeutigkeit reicht es zu zeigen, dass für beliebiges $h : \widetilde{M_0} \to \widetilde{N_0}$ aus $k_{N_0} \circ h = 0$ bereits $h = 0$ folgt. Da nach Voraussetzung $\mathrm{im}(h) \subset \ker(k_{N_0})$ und k_{N_0} Fast-Isomorphismus ist, folgt mit Lemma 3.1.7, dass

$$0 = \mathfrak{m}\,\mathrm{im}(h) = \mathfrak{m}h(\widetilde{M_0}) = h(\mathfrak{m}\widetilde{M_0}) = h(\widetilde{M_0})$$ □

Bemerkung 3.2.6. Da $\widetilde{f}$ der Lift von $g = fk_{M_0}$ für $f : M_0 \to N_0$ ist, folgt aus der Eindeutigkeit in obigem Lemma, dass $h = \widetilde{f}$ genau dann, wenn $k_{N_0}h = fk_{M_0}$.

$$\begin{tikzcd}
\widetilde{M_0} \arrow[r, "\widetilde{f}"] \arrow[dr, "fk_{M_0}"] & \widetilde{N_0} \arrow[d, "k_{N_0}"] \\
& N_0
\end{tikzcd}$$

Außerdem induziert k_{N_0} eine Bijektion

$$\mathrm{Hom}_{V^a}(M, N) = \mathrm{Hom}_V(\widetilde{M_0}, \widetilde{N_0}) \cong \mathrm{Hom}_V(\widetilde{M_0}, N_0).$$

Die rechte Seite wird in [GR03] verwendet, hat aber den Nachteil, das nicht klar ist, wie Verküpfungen von Morphismen eigentlich aussehen.

Beweis von Satz 3.2.4. Nach Definition ist klar, dass 0^a ein Nullobjekt von V^a-**Mod** ist. Seien M und N zwei V^a-Moduln. Wir haben $\widetilde{M_0 \oplus N_0} \cong \widetilde{M_0} \oplus \widetilde{N_0}$, woraus folgt, dass $(M_0 \oplus N_0)^a$ mit den kanonischen Morphismen das Produkt und Coprodukt von M und N in V^a-**Mod** ist.
Sei für das Folgende ein Morphismus $f : M \to N$ in V^a-**Mod** gegeben. Wir müssen zeigen, dass Kern und Cokern von f existieren und dass dann der natürliche Morphismus

$\mathrm{coker}(\ker(f)) \to \ker(\mathrm{coker}(f))$ ein Isomorphismus ist.
Sei $i : K_0 \to \widetilde{M_0}$ der Kern von $f : \widetilde{M_0} \to \widetilde{N_0}$ in V-**Mod**. Wir behaupten, dass $i' = i \circ k_{K_0} : \widetilde{K_0} \to \widetilde{M_0}$ als Morphismus $K_0^a \to M$ der Kern von f in V^a-**Mod** ist.

$$\begin{tikzcd}
\widetilde{K_0} \arrow[r, "k_{K_0}"] & K_0 \arrow[r, "i"] & \widetilde{M_0} \arrow[r, "f"] & \widetilde{N_0} \\
& \widetilde{L_0} \arrow[ul, "g''"] \arrow[u, "g'"] \arrow[ur, "g"'] & &
\end{tikzcd}$$

Klar ist, dass $f \circ i' = 0$ in V^a-**Mod**. Sei nun ein Morphismus $g : L \to M$ mit $f \circ g = 0$ gegeben. Dann erhalten wir in V-**Mod** einen eindeutigen Morphismus $g' : \widetilde{L_0} \to K_0$ mit $i \circ g' = g$. Nach Lemma 3.2.5 erhalten wir einen eindeutigen Morphismus $g'' : \widetilde{L_0} \to \widetilde{K_0}$ in V-**Mod** mit $k_{K_0} \circ g'' = g'$. Dies definiert dann einen eindeutigen Morphismus $g'' : L \to K_0^a$ in V^a-**Mod** mit $i' \circ g'' = g$.
Ist $p : \widetilde{N_0} \to C_0$ der Cokern von f in V-**Mod**, dann existiert nach Lemma 3.2.5 ein eindeutiger Lift $p' : \widetilde{N_0} \to \widetilde{C_0}$ mit $k_{C_0} \circ p' = p$. Wir behaupten, dass $p' : N^a \to C_0^a$ Cokern von f in V^a-**Mod** ist. Dazu reicht es zu zeigen, dass die kanonische Abbildung $k = k_{C_0} : \widetilde{C_0} \to C_0$ ein Isomorphismus ist.

$$\begin{tikzcd}
& & \widetilde{C_0} \arrow[d, bend right, "k"'] \\
\widetilde{M_0} \arrow[r, "f"] & \widetilde{N_0} \arrow[r, "p"] \arrow[ur, "p'"] & C_0 \arrow[u, bend right, "q"']
\end{tikzcd}$$

Wir betrachten alle Morphismen als Morphismen in V-**Mod**: Aus $k(p'f) = pf = 0$ ergibt sich wegen der Eindeutigkeit aus Lemma 3.2.5, dass $p'f = 0$. Es gibt also einen eindeutigen Morphismus $q : C_0 \to \widetilde{C_0}$ mit $qp = p'$. Aus $p = kp' = kqp$ ergibt sich wegen der universellen Eigenschaft des Cokerns, dass $kq = 1_{C_0}$. Auf der anderen Seite ist $k(qk) = (kq)k = k$ und wegen der Eindeutigkeit aus Lemma 3.2.5 ergibt sich $qk = 1_{\widetilde{C_0}}$.
Wir zeigen nun, dass der natürliche Morphismus $\mathrm{coker}(\ker(f)) \to \ker(\mathrm{coker}(f))$ ein Isomorphismus ist. Wir betrachten dazu das folgende, kommutative Diagramm in V-**Mod**.

$$\begin{tikzcd}
\widetilde{K_0} \arrow[d, "k_{K_0}"] \arrow[dr, "i'"] & & & \\
K_0 \arrow[r, "i"] & \widetilde{M_0} \arrow[r, "f"] \arrow[d] \arrow[dr, "f"] & \widetilde{N_0} \arrow[r, "p"] & \widetilde{C_0} \\
& \widetilde{M_0}/i'(\widetilde{K_0}) \arrow[r, "\bar{f}"] & f(\widetilde{M_0}) \arrow[u] &
\end{tikzcd}$$

Dabei sei $\bar{f} : \widetilde{M_0}/i'(\widetilde{K_0}) \to f(\widetilde{M_0})$ der von f induzierte V-lineare Morphismus. Aus Lemma 3.2.5, Bemerkung 3.2.6 und der Konstruktion von Kern und Cokern in V^a-**Mod** folgt, dass der natürliche Morphismus $\mathrm{coker}(\ker(f)) \to \ker(\mathrm{coker}(f))$ gerade $(\bar{f})^a$ ist. Es reicht also zu zeigen, dass $\bar{f}$ ein Fast-Isomorphismus ist. Offensichtlich ist $\bar{f}$ surjektiv und der Kern in V-**Mod** ist gerade $i(K_0)/i(k_{K_0}(\widetilde{K_0}))$. Dies ist fast-null, da $K_0/k_{K_0}(\widetilde{K_0})$ fast-null ist (Beispiel 3.1.2 (6)). □

3.3 Die Kategorie V^a-Mod als Tensorkategorie

Wir beginnen mit der Definition einer Tensorkategorie nach Deligne und Milne.

Definition 3.3.1 ([DMOS82, S. 104 - 105])**.**
Sei $\mathcal{C}$ eine Kategorie und $\otimes : \mathcal{C} \times \mathcal{C} \to \mathcal{C}; (M, N) \mapsto M \otimes N$ ein Funktor.

(i) Eine *Assoziativitätsbedingung* für $(\mathcal{C}, \otimes)$ ist ein in M, N und P natürlicher Isomorphismus
$$\Phi_{M,N,P} : M \otimes (N \otimes P) \xrightarrow{\sim} (M \otimes N) \otimes P,$$
sodass für alle Objekte M, N, P, Q aus $\mathcal{C}$ das folgende Diagramm kommutiert.

$$\begin{tikzcd}
M \otimes (N \otimes (P \otimes Q)) \arrow[r, "\Phi_{M,N,P\otimes Q}"] \arrow[d, "1\otimes\Phi_{N,P,Q}"] & (M \otimes N) \otimes (P \otimes Q) \arrow[r, "\Phi_{M\otimes N,P,Q}"] & ((M \otimes N) \otimes P) \otimes Q \arrow[d, "\Phi_{M,N,P}\otimes 1"] \\
M \otimes ((N \otimes P) \otimes Q) \arrow[rr, "\Phi_{M,N\otimes P,Q}"] & & (M \otimes (N \otimes P)) \otimes Q
\end{tikzcd}$$

(ii) Eine *Kommutativitätsbedingung* für $(\mathcal{C}, \otimes)$ ist ein in M, N natürlicher Isomorphismus
$$\Psi_{M,N} : M \otimes N \xrightarrow{\sim} N \otimes M,$$
sodass für alle Objekte M, N aus $\mathcal{C}$ bereits $\Psi_{N,M} \circ \Psi_{M,N} = 1_{M\otimes N}$ gilt.

(iii) Wir sagen, dass Assoziativitäts- und Kommutativitäsbedingung *kompatibel* sind, wenn für alle Objekte M, N, P aus $\mathcal{C}$ das folgende Diagramm kommutiert.

$$\begin{array}{ccccc} M\otimes(N\otimes P) & \xrightarrow{\Phi_{M,N,P}} & (M\otimes N)\otimes P & \xrightarrow{\Psi_{M\otimes N,P}} & P\otimes(M\otimes N) \\ \downarrow{\scriptstyle 1\otimes\Psi_{N,P}} & & & & \downarrow{\scriptstyle \Phi_{P,M,N}} \\ M\otimes(P\otimes N) & \xrightarrow{\Phi_{M,P,N}} & (M\otimes P)\otimes N & \xrightarrow{\Psi_{M,P}\otimes 1} & (P\otimes M)\otimes N \end{array}$$

(iv) Ein Paar (U, u) bestehend aus einem Objekt $U \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ und einem Isomorphismus $u : U \to U \otimes U$ heißt *Identitätsobjekt* von $(\mathcal{C}, \otimes)$, wenn der Funktor

$$\mathcal{C} \to \mathcal{C} \quad ; \quad M \mapsto U \otimes M \quad ; \quad f \mapsto 1 \otimes f$$

eine Äquivalenz von Kategorien ist.

Wir nennen $(\mathcal{C}, \otimes, \Phi, \Psi)$ eine *Tensorkategorie*, wenn Φ bzw. Ψ miteineinander kompatible Assoziativäts- bzw. Kommutatitätsbedingungen sind, und wenn $(\mathcal{C}, \otimes)$ ein Identitätsobjekt (U, u) hat.
Eine Tensorkategorie $(\mathcal{C}, \otimes, \Phi, \Psi)$ heißt *abelsche Tensorkategorie*, wenn $\mathcal{C}$ eine abelsche Kategorie ist und $\otimes$ ein biadditiver Funktor ist.

Bemerkung 3.3.2. Bedingung (iv) ist äquivalent dazu, dass es einen natürlichen Isomorphismus $u : 1_{\mathcal{C}} \Rightarrow U \otimes (\cdot)$ gibt. Die eine Richtung ist [DMOS82, Proposition 1.3]. Umgekehrt folgt aus der Existenz eines natürlichen Isomorphismus $1_{\mathcal{C}} \Rightarrow U \otimes (\cdot)$ per Definition, dass $M \mapsto U \otimes M$ eine Äquivalenz von Kategorien ist. Wir schreiben im Folgenden daher $u = u_U : U \to U \otimes U$ und $u_M : M \to U \otimes M$ für die natürlichen Isomorphismen.

Beispiel 3.3.3. Die Kategorie V-**Mod** ist zusammen mit $\otimes_V : V\text{-}\mathbf{Mod} \times V\text{-}\mathbf{Mod} \to V\text{-}\mathbf{Mod}$ eine abelsche Tensorkategorie. Dabei ist $(V, (v \otimes v' \mapsto vv'))$ ihr Identitätsobjekt.

Bemerkung 3.3.4. Im Folgenden nehmen wir an, dass für das Identitätsobjekt U immer $\Psi_{U,U} = 1_{U\otimes U}$ gilt. Dies ist, sofern man nicht mit (-1) multipliziert, für die Kategorie V-**Mod** der Fall. Die Annahme wird daher auch für $(V^a\text{-}\mathbf{Mod}, \otimes_{V^a})$ gelten.

Bevor wir sehen, dass das Tensorprodukt $\otimes_V$ ein Tensorprodukt in V^a-**Mod** induziert, führen wir den Begriff einer Algebra ein.

Definition 3.3.5 ([GR03, 2.2.6])**.** Sei $(\mathcal{C}, \otimes, \Phi, \Psi)$ eine Tensorkategorie mit Identitätsobjekt (U, u). Eine $\mathcal{C}$-*Algebra* ist ein Objekt A aus $\mathcal{C}$ zusammen mit Morphismen

(i) $\mu_A : A \otimes A \to A$ (Multiplikation),

(ii) $\underline{1}_A : U \to A$ (Einheit),

sodass folgende Bedingungen erfüllt sind:

(a) *Assoziativität:* $\mu_A \circ (1_A \otimes \mu_A) = \mu_A \circ (\mu_A \otimes 1_A) \circ \Phi_{A,A,A}$,

(b) *Einheit:* $\mu_A \circ (\underline{1}_A \otimes 1_A) = u_A^{-1}$ und $\mu_A \circ (1_A \otimes \underline{1}_A) = u_A^{-1} \circ \Psi_{A,U}$ und

(c) *Kommutativität:* $\mu_A = \mu_A \circ \Psi_{A,A}$.

Das heißt, die folgenden Diagramme kommutieren:

$$
\begin{tikzcd}
A \otimes (A \otimes A) \arrow[r, "\Phi_{A,A,A}"] \arrow[d, "1_A \otimes \mu_A"] & (A \otimes A) \otimes A \arrow[d, "\mu_A \otimes 1_A"] \\
A \otimes A \arrow[dr, "\mu_A"] & A \otimes A \arrow[d, "\mu_A"] \\
 & A
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
U \otimes A \arrow[r, "\underline{1}_A \otimes 1_A"] \arrow[d, equal] & A \otimes A \arrow[d, "\mu_A"] \\
U \otimes A \arrow[r, "u_A^{-1}"] & A
\end{tikzcd}
$$

$$
\begin{tikzcd}
A \otimes U \arrow[r, "1_A \otimes \underline{1}_A"] \arrow[d, "\Psi_{U,A}"] & A \otimes A \arrow[d, "\mu_A"] \\
U \otimes A \arrow[r, "u_A^{-1}"] & A
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
A \otimes A \arrow[r, "\Psi_{A,A}"] \arrow[dr, "\mu_A"] & A \otimes A \arrow[d, "\mu_A"] \\
 & A
\end{tikzcd}
$$

Sind $(A, \mu_A, \underline{1}_A)$ und $(B, \mu_B, \underline{1}_B)$ zwei $\mathcal{C}$-Algebren so heißt ein Morphismus $f : A \to B$ in $\mathcal{C}$ ein $\mathcal{C}$-Algebra-Morphismus, wenn die folgenden Diagramme kommutieren.

$$
\begin{tikzcd}
A \otimes A \arrow[r, "f \otimes f"] \arrow[d, "\mu_A"] & B \otimes B \arrow[d, "\mu_B"] \\
A \arrow[r, "f"] & B
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
 & V \arrow[dl, "\underline{1}_A"'] \arrow[dr, "\underline{1}_B"] & \\
A \arrow[rr, "f"] & & B
\end{tikzcd}
$$

Damit erhalten wir eine Kategorie $\mathcal{C}$-**Alg** der $\mathcal{C}$-Algebren.

Beispiel 3.3.6. In der Kategorie V-**Mod** sind die V-**Mod**-Algebren A auch V-Algebren, wenn man $ab = \mu_A(a \otimes b)$ setzt. Es ist dann nicht schwer zu sehen, dass $\underline{1}_A : V \to A$ ein Ringhomomorphismus ist. Umgekehrt ist jede V-Algebra $V \to A$ via $\mu_A(a \otimes b) = ab$ auch eine V-**Mod**-Algebra. Wir bezeichnen diese Kategorie im Folgenden mit V-**Alg** und werden für die Morphismenmengen stets $\mathrm{Hom}_{V\text{-}\mathbf{Alg}}$ schreiben.

Bemerkung 3.3.7. Man kann nun für $\mathcal{C}$-Algebren A weiter die Kategorie der A-Moduln in $\mathcal{C}$ und der A-Algebren definieren. Siehe dazu Anhang Seite 89.

Im Folgenden zeigen wir, wie die Kategorie der V-fast-Moduln zu einer Tensorkategorie wird. Dieser Teil ist in [GR03] außer der knappen Definition einer Tensorkategorie ohne Details und dem Leser überlassen.

Wir beginnen mit der Beobachtung, dass es für zwei V-Moduln M_0 und N_0 wegen $k_{\widetilde{\mathfrak{m}}} : \widetilde{\mathfrak{m}} \otimes_V \widetilde{\mathfrak{m}} \cong \widetilde{\mathfrak{m}}$ einen natürlichen Isomorphismus

$$\gamma_{M_0,N_0} \;:\; \widetilde{M_0} \otimes_V \widetilde{N_0} \to \widetilde{M_0 \otimes_V N_0} \quad ; \quad \tilde{b} \otimes x \otimes \tilde{c} \otimes y \mapsto b_1 b_2(\tilde{c} \otimes x \otimes y)$$

mit $x \in M_0, y \in N_0$ und $b_1 \otimes b_2 = \tilde{b}, \tilde{c} \in \widetilde{\mathfrak{m}}$ gibt.

Für zwei V^a-Moduln $M = M_0^a$ und $N = N_0^a$ setzen wir nun

$$M \otimes N = (M_0 \otimes_V N_0)^a$$

und für zwei Morphismen $f : M \to M', g : N \to N'$ setzen wir

$$f \otimes g = \gamma_{M_0',N_0'}(f \otimes_V g)\gamma^{-1}_{M_0,N_0} \in \mathrm{Hom}_V(\widetilde{M_0 \otimes_V N_0}, \widetilde{M_0', N_0'}) = \mathrm{Hom}_{V^a}(M \otimes N, M' \otimes N')$$

$$\begin{tikzcd}
\widetilde{M_0 \otimes_V N_0} \arrow[r, "\gamma^{-1}"] & \widetilde{M_0} \otimes_V \widetilde{N_0} \arrow[d, "f \otimes_V g"] \\
\widetilde{M_0' \otimes_V N_0'} & \widetilde{M_0'} \otimes_V \widetilde{N_0'} \arrow[l, "\gamma"]
\end{tikzcd}$$

Bezeichnung. Wir lassen der Lesbarkeit die Subskripte bei γ oft weg.

Offensichtlich definiert dies einen biadditiven Funktor

$$\otimes : V^a\text{-}\mathbf{Mod} \times V^a\text{-}\mathbf{Mod} \to V^a\text{-}\mathbf{Mod}.$$

Lemma 3.3.8. *Seien $f : M_0 \to M_0'$ und $g : N_0 \to N_0'$ zwei V-lineare Morphismen. Dann gilt*

$$f^a \otimes g^a = (f \otimes_V g)^a.$$

Beweis. Aus den Definitionen ergibt sich sogleich, dass $\gamma \circ (\widetilde{f} \otimes_V \widetilde{g}) = \widetilde{f \otimes_V g} \circ \gamma$ gilt. Daraus folgt sofort die Aussage. □

Wir können nun leicht den folgenden Satz beweisen.

Satz 3.3.9. *Seien Φ und Ψ die kompatiblen Assoziativitäts- bzw. Kommutativitätsbedingungen von $(V\text{-}\boldsymbol{Mod}, \otimes_V)$ und bezeichne $u_M : M \to V \otimes_V M$ den kanonischen Isomorphismus. Dann ist $(V^a\text{-}\boldsymbol{Mod}, \Phi^a, \Psi^a)$ eine abelsche Tensorkategorie mit Identitäsobjekt $u^a : V^a \to V^a \otimes V^a$.*

Beweis. Aus Lemma 3.3.8 folgt sofort, dass alle Diagramme der Definition einer Tensorkategorie kommutieren. Weiterhin sind die Bedingungen offensichtlich Isomorphismen. Die Natürlichkeit der Bedingungen hingegen folgt durch einfache Rechnungen aus der Definition von $f \otimes g$. Im Anhang, Seite 91 führen wir eine beispielhafte Rechnung für Ψ^a durch. □

Lemma 3.3.10. *In der Kategorie V^a-**Mod** sind für V^a-Moduln M und N die Funktoren $P \mapsto M \otimes P$ und $P \mapsto P \otimes N$ rechtsexakt.*

Beweis. Wir zeigen nur die Rechtsexaktheit von $P \mapsto M \otimes P$. Sei $0 \to P' \xrightarrow{f} P \xrightarrow{g} P'' \to 0$ eine exakte Sequenz in V^a-**Mod**. Fassen wir g, f als Morphismen in V-**Mod** auf, erhalten wir eine rechtsexakte Sequenz

$$M_0 \otimes_V \widetilde{P'_0} \xrightarrow{1 \otimes_V f} M_0 \otimes_V \widetilde{P_0} \xrightarrow{1 \otimes_V g} M_0 \otimes_V \widetilde{P''_0} \to 0,$$

Insbesondere erhalten wir wegen der Exaktheit des Lokalisierungsfunktors (Satz 3.4.20) folgendes kommutatives Diagramm mit exakter oberer Reihe in V^a-**Mod**, dessen vertikale Pfeile Isomorphismen sind.

$$\begin{tikzcd}
M \otimes (\widetilde{P'_0})^a \arrow[r, "1 \otimes f^a"] \arrow[d, "1 \otimes k^a_{P'_0}"] & M \otimes (\widetilde{P_0})^a \arrow[r, "1 \otimes g^a"] \arrow[d, "1 \otimes k^a_{P_0}"] & M \otimes (\widetilde{P''_0})^a \arrow[r] \arrow[d, "1 \otimes k^a_{P''_0}"] & 0 \\
M \otimes P' \arrow[r, "1 \otimes f"] & M \otimes P \arrow[r, "1 \otimes g"] & M \otimes P'' \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Insbesondere ist die untere Reihe exakt, was zu zeigen war. □

Das obige Lemma wird zum Beweis von Satz 3.4.20 nicht verwendet.

Bemerkung 3.3.11. Der Funktor $(\cdot)^a : V$-**Mod** $\to V^a$-**Mod** schränkt sich auf einen Funktor V-**Alg** $\to V^a$-**Alg** ein: Ist $(A_0, \mu_{A_0}, \underline{1}_{A_0})$ eine V-Algebra, so ist wegen Lemma 3.3.8 leicht zu sehen, dass $A = A_0^a$ mit $\mu_A = (\mu_{A_0}^a)$ und $\underline{1}_A = (\underline{1}_{A_0})^a$ eine V^a-Algebra ist. Ebenso ist $f^a : A_0^a \to B_0^a$ ein V^a-Algebra-Morphismus, wenn $f : A_0 \to B_0$ ein V-Algebra-Morphismus ist.

3.4 Der Fast-Elemente-Funktor und Ergebnisse

Wir beginnen mit Konstruktionen, die im Allgemeinen für abelsche Tensorkategorien gelten. Vergleiche auch [GR03, 2.2.9].

Satz 3.4.1. *Sei $(\mathcal{C}, \Phi, \Psi, \otimes)$ eine abelsche Tensorkategorie mit Identitätsobjekt (U, u), sodass $\Psi_{U,U} = 1_{U \otimes U}$ gilt.*

(a) Dann ist $\mathrm{End}_{\mathcal{C}}(U)$ *ein kommutativer Ring.*

(b) Ist M *ein Objekt von* $\mathcal{C}$*, dann ist* $M_* = \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(U, M)$ *ein* $\mathrm{End}_{\mathcal{C}}(U)$*-Modul via*

$$\mathrm{End}_{\mathcal{C}}(U) \times M_* \to M_* \quad ; \quad (\alpha, \beta) \ \mapsto \beta \circ \alpha.$$

Insbesondere erhalten wir via

$$M \mapsto M_* \quad ; \quad (f : M \to N) \mapsto (f_* : M_* \to N_*; \beta \mapsto f \circ \beta)$$

einen Funktor $\mathcal{C} \to \mathrm{End}_{\mathcal{C}}(U)$*-**Mod**.*

(c) Ist $(A, \mu_A, \underline{1}_A)$ *eine* $\mathcal{C}$*-Algebra, so ist* A_* *eine* $\mathrm{End}_{\mathcal{C}}(U)$*-Algebra via*

$$\mu_{A_*}(a \otimes_{\mathrm{End}_{\mathcal{C}}(U)} b) = \mu_A \circ (a \otimes_{\mathcal{C}} b) \circ u$$

und

$$\underline{1}_{A_*} = (\underline{1}_A)_* : \mathrm{End}_{\mathcal{C}}(U) \to A_*; \alpha \mapsto \underline{1}_A \circ \alpha;$$

vergleiche Bemerkung 3.3.11 zu den Axiomen einer Algebra über dem Ring $\mathrm{End}_{\mathcal{C}}(U)$*. Wir haben also insbesondere das Diagramm*

$$\begin{tikzcd}
A_* \otimes_{\mathrm{End}_{\mathcal{C}}(U)} A_* \arrow[d, "t_{A,A}"] \arrow[dd, bend right=60, "\mu_{A_*}"'] \\
(A \otimes_{\mathcal{C}} A)_* \arrow[d, "(\mu_A)_*"] \\
A_*,
\end{tikzcd}$$

wobei $t_{A,A}$ *die durch* $\alpha \otimes_{\mathrm{End}_{\mathcal{C}}(U)} \beta \mapsto (\alpha \otimes_{\mathcal{C}} \beta) \circ u$ *induzierte Abbildung ist. Außerdem schränkt der Funktor aus (b) zu einem Funktor*

$$(\cdot)_* : \mathcal{C}\text{-}\boldsymbol{Alg} \to \mathrm{End}_{\mathcal{C}}(U)\text{-}\boldsymbol{Alg}$$

ein.

Beweis. Wir skizzieren den Beweis im Anhang, Seite 91. Wir bemerken, dass wir die Voraussetzung $\Psi_{U,U} = 1_{U \otimes U}$ nur im Teil (c) gebrauchen. □

Wir lassen im Folgenden manchmal die Subskripte an den Tensorzeichen $\otimes$ weg, wenn klar ist, um welches Tensorprodukt es sich handelt.

Bemerkung 3.4.2. Seien M und N zwei Objekte aus der Tensorkategorie $\mathcal{C}$, dann ist die Abbildung $t_{M,N} : M_* \otimes_{\mathrm{End}_{\mathcal{C}}(U)} N_* \to (M \otimes N)_*$ wohldefiniert.

Beweis. Wir müssen zeigen, dass die Abbildung

$$t : M_* \times N_* \to (M \otimes N)_* \quad ; \quad (\beta, \beta') \mapsto (\beta \otimes \beta') \circ u$$

$\mathrm{End}_{\mathcal{C}}(U)$-bilinear ist. Die Biaddiditivät ist offensichtlich, da $\otimes : \mathcal{C} \times \mathcal{C} \to \mathcal{C}$ biadditiv ist. Für die Skalarmultiplikation benutzen wir $\Psi_{U,U} = 1_{U \otimes U}$ und betrachten das kommutative Diagramm

$$\begin{tikzcd}
U \arrow[r, "u"] \arrow[d, "\alpha"] & U \otimes U \arrow[r, "1"] \arrow[d, "1_U \otimes \alpha"] & U \otimes U \arrow[d, "\alpha \otimes 1_U"] \\
U \arrow[r, "u"] & U \otimes U \arrow[r, "1"] & U \otimes U.
\end{tikzcd}$$

Aus diesem folgt mit den Definitionen für $\beta \in M_*, \beta' \in N_*, \alpha \in \mathrm{End}_{\mathcal{C}}(U)$ sofort

$$t(\alpha \cdot \beta, \beta') = ((\beta \circ \alpha) \otimes \beta')u = (\beta \otimes \beta') \circ (\alpha \otimes 1_U) \circ u = ((\beta \otimes \beta')u) \circ \alpha = \alpha \cdot t(\beta, \beta')$$

und analog

$$t(\beta, \alpha \cdot \beta') = \alpha \cdot t(\beta, \beta')$$

□

Bemerkung 3.4.3. Für eine $\mathcal{C}$-Algebra A stimmt die $\mathrm{End}_{\mathcal{C}}(U)$-Modulstruktur, die von der $\mathrm{End}_{\mathcal{C}}(U)$-Algebra-Struktur von A_* aus Satz 3.4.1 (c) vererbt wird, mit der $\mathrm{End}_{\mathcal{C}}(U)$-Modulstruktur aus Satz 3.4.1 (b) überein. Siehe dazu Anhang Seite 92.

Mit dem kanonischen Isomorphismus

$$n : V \to \mathrm{Hom}_V(V, V) \quad ; \quad v' \mapsto vv'$$

ist

$$\mathrm{End}_{V^a\text{-}\mathbf{Mod}}(V^a, V^a) = \mathrm{Hom}_{V^a}(V^a, V^a)$$

via $V \xrightarrow{n} \mathrm{Hom}_V(V, V) \xrightarrow{(\cdot)^a} \mathrm{Hom}_{V^a}(V^a, V^a)$ eine V-Algebra. Wenden wir die Konstruktionen aus Satz 3.4.1 auf die Kategorie $(V^a\text{-}\mathbf{Mod}, \otimes)$ an, so erhalten wir insbesondere einen Funktor

$$(\cdot)_* : V^a\text{-}\mathbf{Mod} \to V\text{-}\mathbf{Mod} \quad ; \quad M \mapsto M_* = \mathrm{Hom}_{V^a}(V^a, M) = \mathrm{Hom}_V(\widetilde{V}, \widetilde{M_0}).$$

Weiterhin ist für eine V^a-**Mod**-Algebra A die $\mathrm{End}_{V^a\text{-}\mathbf{Mod}}(V^a)$-Algebra A_* auch eine V-Algebra und die Multiplikation ist durch

$$\mu_{A_*} = (\mu_A)_*(t_{A,A} \circ u) : A_* \otimes A_* \to (A \otimes A)_* \to A_*$$

gegeben, wobei wir hier mit $t_{M,N}$ für zwei V^a-Moduln M, N die kanonische Abbildung

$$t_{M,N} : M_* \otimes_V N_* \to M_* \otimes_{\mathrm{End}_{V^a\text{-}\mathbf{Mod}}(V^a)} N_* \to (M \otimes N)_*$$

bezeichnen. Der zweite Pfeil ist gerade die Abbildung aus Bemerkung 3.4.2. Inbesondere ist also $t_{M,N}$ eine wohldefinierte V-lineare Abbildung. Ebenso erhalten wir nach Satz 3.4.1 (c) eine Einschränkung

$$(\cdot)_* : V^a\textbf{-Alg} \to V\textbf{-Alg}.$$

Definition 3.4.4. Der oben definierte Funktor $(\cdot)_* : V^a\textbf{-Mod} \to V\textbf{-Mod}$ bzw. $(\cdot)_* : V^a\textbf{-Alg} \to V\textbf{-Alg}$ heißt *Fast-Elemente-Funktor*.

Bemerkung 3.4.5. Die kanonische V-Modulstruktur von $\mathrm{Hom}_V(\widetilde{V}, \widetilde{M_0})$, die durch $v \cdot f = f(v\cdot)$ gegeben ist, stimmt überein mit der V-Modulstruktur von

$$M_* = \mathrm{Hom}_{V^a}(V^a, M),$$

die durch obigen Funktor gegeben ist.

Bemerkung 3.4.6. Ist M ein V-Modul und $x \in M_*$ mit $bx = 0$ für alle $b \in \mathfrak{m}$, so ist bereits $x = 0$. Wir können nämlich für alle Erzeuger $\widetilde{b} \otimes v$ von $\widetilde{\mathfrak{m}} \otimes_V V$ schreiben $x(\widetilde{b} \otimes v) = b_1' x(b_1'' \otimes b_2 \otimes v)$ mit $\widetilde{b} = b_1 \otimes b_2 = (b_1' b_1'') \otimes b_2$ und $b_1', b_1'', b_2 \in \mathfrak{m}$.

Wir werden nun sehen, dass der Fast-Elemente-Funktor rechtsadjungiert zu dem Lokalisierungsfunktor ist. Wir erinnern kurz an die Definition einer Adjunktion und halten so Notationen fest.

Definition 3.4.7 ([GR12, 1.1.10])**.** Seien $\mathcal{C}, \mathcal{D}$ zwei Kategorien, und $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ und $G : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ zwei Funktoren. Dann heißt F *rechtsadjungiert* zu G, wenn es für alle Objekte C aus $\mathcal{C}$ und alle Objekte D aus $\mathcal{D}$ Bijektionen

$$j_{C,D} : \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(GD, C) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(D, FC)$$

gibt, die in C und D natürlich sind. Das heißt für $f : C \to C'$ in $\mathcal{C}$ und $g : D' \to D$ in $\mathcal{D}$ sind die beiden folgenden Diagramme kommutativ.

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(GD, C) & \xrightarrow{j_{C,D}} & \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(D, FC) \\ \downarrow{\scriptstyle (\cdot)\circ Gg} & & \downarrow{\scriptstyle (\cdot)\circ g} \\ \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(GD', C) & \xrightarrow{j_{C,D'}} & \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(D', FC) \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(GD, C) & \xrightarrow{j_{C,D}} & \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(D, FC) \\ \downarrow{\scriptstyle f\circ(\cdot)} & & \downarrow{\scriptstyle Ff\circ(\cdot)} \\ \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(GD, C') & \xrightarrow{j_{C',D}} & \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(D, FC') \end{array}$$

In Worten, für alle $h : GD \to C$ gilt $j(h \circ Gg) = j(h) \circ g$ und $j(f \circ h) = Ff \circ j(h)$. Man nennt das Paar (G, F) auch *adjungiert* und $j_{\cdot,\cdot}$ seine *Adjunktion*.

Insbesondere ordnet dies jedem Objekt D aus $\mathcal{D}$ (bzw. C aus $\mathcal{C}$) einen Morphismus

$$\nu_D = j_{GD,D}(1_{GD}) : D \to FGD \quad (\text{bzw.} \quad \epsilon_C = j^{-1}_{C,FC}(1_{FC}) : GFC \to C)$$

zu. Aus der Natürlichkeit der Adjunktion folgt, dass wir natürliche Transformationen von Funktoren

$$\nu : 1_{\mathcal{D}} \Rightarrow FG \quad (\text{bzw.} \quad \epsilon : GF \Rightarrow 1_{\mathcal{C}})$$

erhalten, die *Einheit* (bzw. *Coeinheit*) der Adjunktion heißt.

Bemerkung 3.4.8. Wir benutzen später, dass das folgende Diagramm für alle D aus $\mathcal{D}$ kommutiert.

$$\begin{tikzcd} GD \arrow[r, "G(\nu_D)"] \arrow[dr, "1_{GD}"'] & G(FGD) = GF(GD) \arrow[d, "\epsilon_{GD}"] \\ & GD \end{tikzcd}$$

Dies folgt aus allgemeinen Eigenschaften einer Adjunktion, vergleiche [GR12, §1.1.10].

Satz 3.4.9 ([GR03, Proposition 2.2.14 (ii)])**.**
*Der Fast-Elemente Funktor $(\cdot)_* : V^a$-**Mod** $\to V$-**Mod** aus Definition 3.4.4 ist rechtsadjungiert zum Lokalisierungsfunktor $(\cdot)^a : V$-**Mod** $\to V^a$-**Mod**.*

Wir wiederholen den Beweis aus [GR03]:

Beweis von Satz 3.4.9. Seien M_0 ein V-Modul und $N = N_0^a$ ein V^a-Modul. Wir müssen zeigen, dass es in M_0 und N natürliche Bijektionen

$$j_{N,M_0} : \mathrm{Hom}_{V^a}(M_0^a, N) \to \mathrm{Hom}_V(M_0, N_*)$$

gibt. Dies ergibt sich so:

$$\begin{aligned} \mathrm{Hom}_{V^a}(M_0^a, N) = \mathrm{Hom}_V(\widetilde{\mathfrak{m}} \otimes_V M_0, \widetilde{\mathfrak{m}} \otimes_V N_0) &\cong \mathrm{Hom}_V(M_0, \mathrm{Hom}_V(\widetilde{\mathfrak{m}}, \widetilde{\mathfrak{m}} \otimes_V N_0)) \cong \\ \cong \mathrm{Hom}_V(M_0, \mathrm{Hom}_{V^a}(V^a, N)) &= \mathrm{Hom}_V(M_0, N_*) \end{aligned}$$

Dabei kommt die erste Bijektion von der Adjunktion des Tensorproduktes und des Hom-Funktors in V-**Mod**, die durch

$$(f : \widetilde{\mathfrak{m}} \otimes_V M_0 \to \widetilde{\mathfrak{m}} \otimes_V N_0) \mapsto (x \mapsto f(\cdot \otimes x))$$

gegeben ist. Die zweite Bijektion ergibt sich durch die Identifikation

$$\mathrm{Hom}_{V\text{-}\mathbf{Mod}}(\widetilde{\mathfrak{m}}, \widetilde{\mathfrak{m}} \otimes_V N_0) \cong \mathrm{Hom}_{V\text{-}\mathbf{Mod}}(\widetilde{\mathfrak{m}} \otimes_V V, \widetilde{\mathfrak{m}} \otimes_V N_0) = \mathrm{Hom}_{V^a\text{-}\mathbf{Mod}}(V^a, N),$$

die über den kanonischen Isomorphismus $\widetilde{\mathfrak{m}} \cong \widetilde{\mathfrak{m}} \otimes_V V$ gegeben ist. Die Natürlichkeit in M_0 und N folgt sofort aus der Natürlichkeit in M_0 und $\widetilde{\mathfrak{m}} \otimes_V N_0$ in der Bijektion $\mathrm{Hom}_{V\text{-}\mathbf{Mod}}(M_0, \mathrm{Hom}_{V\text{-}\mathbf{Mod}}(\widetilde{\mathfrak{m}}, \widetilde{\mathfrak{m}} \otimes_V N_0)) \cong \mathrm{Hom}_{V\text{-}\mathbf{Mod}}(M_0, \mathrm{Hom}_{V^a\text{-}\mathbf{Mod}}(V^a, N))$. □

Bemerkung 3.4.10. Wir bezeichnen die Bijektionen

$$\mathrm{Hom}_{V^a\text{-}\mathbf{Mod}}(M_0^a, N) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{V\text{-}\mathbf{Mod}}(M_0, N_*)$$

im Folgenden stets mit j. Aus der Natürlichkeit ergeben sich die Gleichungen

$$j(h \circ g^a) = j(h) \circ g \text{ und } f_* \circ j(h) = j(f \circ h),$$

vergleiche Definition 3.4.7.

Bemerkung 3.4.11. Wir können die Einheit der Adjunktion

$$\nu_{M_0} = j_{M_0^a, M_0}(1_{M_0}) : M_0 \to (M_0^a)_*$$

direkt angeben. Dazu gehen wir die Kette der Bijektionen in dem Beweis von Satz 3.4.9 mit $f = 1_{M_0^a} = (1_{M_0})^a$ durch: Ein Element $x \in M_0$ wird demnach von ν_{M_0} auf den Morphismus

$$(\tilde{b} \otimes v \mapsto v\tilde{b} \mapsto (v\tilde{b}) \otimes x) \in \mathrm{Hom}_{V\text{-}\mathbf{Mod}}(\widetilde{\mathfrak{m}} \otimes_V V, \widetilde{\mathfrak{m}} \otimes_V M_0) = \mathrm{Hom}_{V^a\text{-}\mathbf{Mod}}(V^a, M_0^a) = (M_0^a)_*$$

geschickt.

Bemerkung 3.4.12. Insbesondere sehen wir mit Bemerkung 3.4.11, dass der kanonische Ringhomomorphismus

$$V \to \mathrm{Hom}_{V^a\text{-}\mathbf{Mod}}(V^a, V^a); v \mapsto n(v)^a,$$

mit dem wir $\mathrm{End}_{V^a\text{-}\mathbf{Mod}}(V^a)$ zu einer V-Algebra gemacht haben, gerade der Morphismus $\nu_V : V \to (V^a)_*$ ist.

Satz 3.4.13 ([GR03, §2.2.10])**.** *Sei M_0 ein V-Modul. Dann ist die natürliche Abbildung $\nu_{M_0} : M_0 \to (M_0^a)_*$ ein Fast-Isomorphismus.*

Wir geben mit Hilfe von Bemerkung 3.4.11 einen direkten

Beweis. Sei $b \in \mathfrak{m}$ beliebig. Wegen $\mathfrak{m} = \mathfrak{m}^2$ gibt es $b_1, b_2 \in \mathfrak{m}$ mit $b = b_1 b_2$ und es folgt für alle $x \in \ker(\nu_{M_0})$, dass

$$bx = b_1 b_2 x = k_{M_0}(b_1 \otimes b_2 \otimes x) = k_{M_0}(\nu_{M_0}(x)(b_1 \otimes b_2 \otimes 1)) = 0.$$

Der Kern von ν_{M_0} ist also fast-null.
Sei nun $f \in (M_0^a)_* = \mathrm{Hom}_{V\text{-}\mathbf{Mod}}(\widetilde{\mathfrak{m}} \otimes_V V, \widetilde{\mathfrak{m}} \otimes_V M_0)$. Wir behaupten, dass

$$bf = \nu_{M_0} k_{M_0} f(b_1 \otimes b_2 \otimes 1),$$

Aus der Behauptung folgt, dass $\mathfrak{m}(M_0^a)_* \subset \mathrm{im}(\nu_{M_0})$, also der Cokern von ν_{M_0} fast null ist. Um die Behauptung zu zeigen, seien $c_1, c_2 \in \mathfrak{m}$ und $v \in V$. Wir schreiben $\widetilde{b} = b_1 \otimes b_2$ und $\widetilde{c} = c_1 \otimes c_2$. Dann ist

$$(\nu_{M_0} k_{M_0} f(\widetilde{b} \otimes 1))(\widetilde{c} \otimes v) = \widetilde{c} \otimes (v k_{M_0} f(\widetilde{b} \otimes 1)) = \widetilde{b} \otimes k_{M_0} f(\widetilde{c} \otimes v),$$

wobei wir hier wegen $\mathfrak{m} = \mathfrak{m}^2$ die c_1, c_2, b_1, b_2 vertauschen dürfen. Die rechte Seite ist aber wegen $\widetilde{k_{M_0}} = k_{\widetilde{M_0}}$ gerade $b_1 b_2 f(\widetilde{c} \otimes v) = (bf)(\widetilde{c} \otimes v)$. $\square$

Korollar 3.4.14 ([GR03, Proposition 2.2.14 (iii)]). *Die Coeinheit $\epsilon : (\cdot)^a \circ (\cdot)_* \Rightarrow 1_{V^a\text{-}\boldsymbol{Mod}}$ der Adjunktion aus Satz 3.4.9 ist ein Isomorphismus von Funktoren.*

Beweis. Aus Satz 3.4.13 folgt, dass $(\nu_{M_0})^a$ für alle V-Moduln M_0 ein Isomorphismus ist. Mit Bemerkung Bemerkung 3.4.8 und $G = (\cdot)^a$ folgt, dass alle $\epsilon_{M_0^a}$ Isomorphismen sind. Außerdem gibt es nach Konstruktion für alle V^a-Moduln M einen V-Modul M_0 mit $M = M_0^a$. ☐

Bemerkung 3.4.15. Mit Bemerkung 3.4.8 und weil eine V-lineare Abbildung f genau dann Fast-Isomorphismus ist, wenn f^a Isomorphismus ist, sehen wir, dass wir Satz 3.4.13 auch umgekehrt aus Korollar 3.4.14 folgern können. Letzteres folgt auch allgemein mit [Gab62, Chap. III, § 3, Cor. 1] direkt aus Satz 3.4.9.

Das folgende Lemma zeigt, dass die Adjunktion in gewisser Weise mit den Bifunktoren $\otimes_{V^a}$ und $\otimes_V$ vertauscht.

Lemma 3.4.16. *Seien M_0, M_0' zwei V-Moduln und N, N' zwei V^a-Moduln. Dann kommutiert das folgende Diagramm.*

$$
\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}_{V^a}(M_0^a, N) \times \mathrm{Hom}_{V^a}(M_0'^a, N') \arrow[r, "j \times j"] \arrow[d, "\otimes_{V^a}"] & \mathrm{Hom}_V(M_0, N_*) \times \mathrm{Hom}_V(M_0', N_*') \arrow[d, "\otimes_V"] \\
\mathrm{Hom}_{V^a}(M_0^a \otimes M_0'^a, N \otimes N') \arrow[dr, "j"] & \mathrm{Hom}_V(M_0 \otimes_V M_0', N_* \otimes_V N_*') \arrow[d, "t_{N,N'} \circ (\cdot)"] \\
& \mathrm{Hom}_V(M_0 \otimes_V M_0', (N \otimes N')_*)
\end{tikzcd}
$$

*Es gilt also für zwei V^a-**Mod**-Morphismen $f : M_0^a \to N$ und $g : M_0'^a \to N'$, dass $j(f \otimes g) = t_{N,N'} \circ (j(f) \otimes_V j(g))$.*

Beweis. Dies folgt mit direkter Berechnung aus den Definitionen und der Konstruktion der Adjunktion j. Wir führen diese Rechnung im Anhang, siehe Seite 93. ☐

Wir zeigen nun den Teil von [GR03, Proposition 2.2.14] für Algebren.

Satz 3.4.17. *Der Fast-Elemente Funktor für V^a-Algebren $(\cdot)_* : V^a\text{-}\boldsymbol{Alg} \to V\text{-}\boldsymbol{Alg}$ ist rechtsadjungiert zu der Einschränkung des Lokalisierungsfunktors auf V-Algebren $(\cdot)^a : V\text{-}\boldsymbol{Alg} \to V^a\text{-}\boldsymbol{Alg}$.*

Beweis. Mit Satz 3.4.9 reicht es zu zeigen, dass für alle V-Algebren A_0 und alle V^a-Algebren B ein V^a-**Mod**-Morphismus $f : A_0^a \to B$ genau dann ein V^a-**Alg**-Morphismus ist, wenn $j(f) : A_0 \to B_*$ ein V-Algebra-Morphismus ist. Wir bezeichnen mit

$$\mu_{B_*} : B_* \otimes_V B_* \to B_*$$

die V-lineare Abbildung, die durch

$$\mu_{B_*}(\alpha \otimes_V \beta) = \alpha \cdot \beta = \mu_B \circ (\alpha \otimes \beta) \circ u = t_{B,B}(\alpha \otimes_V \beta)$$

gegeben ist. Analog bezeichnen wir μ_{A_0}; die V^a-Algebra Struktur auf A_0^a ist durch $\mu_{A_0}^a$ gegeben. Es reicht zu zeigen, dass die Diagramme

$$\begin{tikzcd}
A_0^a \otimes A_0^a \arrow[r, "f \otimes f"] \arrow[d, "\mu_{A_0}^a"] & B \otimes B \arrow[d, "\mu_B"] \\
A_0^a \arrow[r, "f"] & B
\end{tikzcd}
\quad \text{und} \quad
\begin{tikzcd}
 & V^a \arrow[dl, "\underline{1}_{A_0}^a"'] \arrow[dr, "\underline{1}_B"] & \\
A_0^a \arrow[rr, "f"] & & B
\end{tikzcd}$$

genau dann kommutieren, wenn die folgenden beiden Diagramme kommutieren.

$$\begin{tikzcd}
A_0 \otimes_V A_0 \arrow[r, "j(f) \otimes_V j(f)"] \arrow[dd, "\mu_{A_0}"] & B_* \otimes_V B_* \arrow[d, "t_{B,B}"'] \arrow[dd, bend left, "\mu_{B_*}"] \\
 & (B \otimes B)_* \arrow[d, "(\mu_B)_*"'] \\
A_0 \arrow[r, "j(f)"] & B_*
\end{tikzcd}
\quad \text{und} \quad
\begin{tikzcd}
 & V \arrow[dl, "\underline{1}_{A_0}"'] \arrow[dr, "\underline{1}_{B_*}"] & \\
A_0 \arrow[rr, "j(f)"] & & B_*
\end{tikzcd}$$

Wegen der Natürlichkeit von j und Lemma 3.4.16 ist

$$j(\mu_B \circ (f \otimes f)) = (\mu_B)_* j(f \otimes f) = (\mu_B)_* t_{B,B} \circ (j(f) \otimes_V j(f))$$
$$j(f \circ (\mu_{A_0})^a) = j(f)\mu_{A_0}$$
$$j(f \circ (\underline{1}_{A_0}^a) = j(f) \circ \underline{1}_{A_0}$$
$$j(\underline{1}_B) = j(\underline{1}_B \circ 1_{V^a}) = (\underline{1}_B)_* j(1_{V^a}) = (\underline{1}_B)_* \circ \nu_V = \underline{1}_{B_*}$$

Aus diesen Gleichungen folgt, dass die unteren Diagramme kommutieren, wenn die oberen Diagramme kommutieren. Wegen der Injektivität von j folgt die umgekehrte Richtung ebenfalls aus diesen Gleichungen. □

Korollar 3.4.18. *Die Coeinheit ϵ der Adjunktion aus Satz 3.4.17 induziert einen natürlichen V^a-**Alg**-Isomorphismus*

$$\epsilon_A : A \cong A_*^a.$$

Beweis. Dies ist klar, da die Coeinheit Urbild der Identität $A_* \to A_*$ unter der Adjunktion j ist. □

Für einen V^a-Modul M setzen wir wie in [GR03, 2.2.22]

$$M_! = \widetilde{\mathfrak{m}} \otimes_V (M_*) = \widetilde{M_*};$$

dies ist auf kanonische Weise ein V-Modul. Für einen V^a-Modulmorphismus $f : M \to N$ setzen wir

$$f_! = 1_{\widetilde{\mathfrak{m}}} \otimes_V (f_*) = \widetilde{f_*}$$

und erhalten so einen Funktor $(\cdot)_! : V^a\text{-}\mathbf{Mod} \to V\text{-}\mathbf{Mod}$.

Satz 3.4.19 ([GR03, Proposition 2.2.23. (i)])**.** *Der Funktor $(\cdot)_! : V^a\text{-}\boldsymbol{Mod} \to V\text{-}\boldsymbol{Mod}$ ist linksadjungiert zu dem Lokalisierungsfunktor $(\cdot)^a : V\text{-}\boldsymbol{Mod} \to V^a\text{-}\boldsymbol{Mod}$.*

Beweis. Der natürliche Isomorphismus $\nu^a_{M_0} : M \to (M_*)^a$ liefert eine natürliche Bijektion

$$i : \mathrm{Hom}_{V^a\text{-}\mathbf{Mod}}(M, (N_0)^a) \cong \mathrm{Hom}_{V^a\text{-}\mathbf{Mod}}((M_*)^a, (N_0)^a) = \mathrm{Hom}_{V\text{-}\mathbf{Mod}}(\widetilde{M_*}, \widetilde{N_0})$$

Weiterhin haben wir nach Lemma 3.2.5 eine im ersten Argument natürliche Bijektion

$$i' : \mathrm{Hom}_{V\text{-}\mathbf{Mod}}(\widetilde{M_*}, \widetilde{N_0}) \cong \mathrm{Hom}_{V\text{-}\mathbf{Mod}}(\widetilde{M_*}, N_0),$$

die durch $f \mapsto k_{N_0} \circ f$ induziert ist.
Es ist leicht zu sehen, dass die Bijektion

$$l = i' \circ i : \mathrm{Hom}_{V^a\text{-}\mathbf{Mod}}(M, (N_0)^a) \cong \mathrm{Hom}_{V\text{-}\mathbf{Mod}}(\widetilde{M_*}, N_0) = \mathrm{Hom}_{V\text{-}\mathbf{Mod}}(M_!, N_0)$$

in N_0 natürlich ist: sei nämlich $g : N_0 \to N_0'$ und $f : M \to (N_0)^a$, dann ist

$$l(g^a \circ f) = i(i'(g^a \circ f)) = i(\widetilde{g} \circ i(f)) = k_{N_0'} \circ \widetilde{g} \circ i(f) = g \circ k_{N_0} \circ i(f) = g \circ i'(i(f)) = g \circ l(f).$$

Ganz allgemein folgt aus der Natürlichkeit von l auch die Natürlichkeit von l^{-1}, was die gesuchte Adjunktion $\mathrm{Hom}_{V\text{-}\mathbf{Mod}}(M_!, N_0) \cong \mathrm{Hom}_{V^a\text{-}\mathbf{Mod}}(M, N_0^a)$ ist. □

Nun ergibt sich

Satz 3.4.20. *Der Lokalisierungsfunktor $(\cdot)^a : V\text{-}\boldsymbol{Mod} \to V^a\text{-}\boldsymbol{Mod}$ ist exakt, das heißt, er vertauscht mit Limites und Colimites.*
Der Fast-Elemente-Funktor $(\cdot)_* : V^a\text{-}\boldsymbol{Mod} \to V\text{-}\boldsymbol{Mod}$ ist linksexakt, das heißt er vertauscht mit Limites.

Beweis. Es ist ein allgemeines Resultat, dass Rechtsadjungierte linksexakt und Linksadjungierte rechtsexakt sind [Bor94, Proposition 3.2.2]. Daher folgt die Aussage aus Satz 3.4.9 und Satz 3.4.19. □

Wir führen an dieser Stelle Notationen ein, die Scholze gebraucht. Für ein Element $x \in V$ und einen V^a-Modul $M = (M_0)^a$ ist nach [GR03, 2.2.6] der V^a-Modul xM als Bild von $(x)^a \otimes M \to V^a \otimes M \to M$ definiert. Da der Lokalisierungsfunktor exakt ist, erhalten wir

$$xM = (xM_0)^a.$$

Insbesondere können wir über den Isomorphismus $M \to M_*^a$ dann xM mit $(xM_*)^a$ identifizieren.
Ebenso ist mit M/x der Cokern von $xM \to M$ in V^a-**Mod** gemeint und wiederum, da $(\cdot)^a$ exakt ist, ergibt sich

$$M/x = (M_0/xM_0)^a = (M_0/x)^a.$$

Weiterhin können wir für V^a-Algebren A definieren, was ein Ideal I von A ist, vergleiche [GR03, 2.2.6]. Man erhält dann wegen der Rechtsexaktheit des Tensorproduktes (Lemma 3.3.10) auf dem Cokern A/I eine V^a-Algebra-Struktur. Wir führen dies hier nicht aus.

Bemerkung 3.4.21. Die Kategorien V^a-**Mod** bzw. V^a-**Alg** sind vollständig und co-vollständig, das heißt, alle Limites und Colimites existieren. Die Aussagen folgen aus Korollar 3.4.14 bzw. Korollar 3.4.18, vergleiche [GR03, Corollary 2.2.16].

Insbesondere gibt es für ein $x \in V$ in V^a-**Mod** den Limes $\varprojlim_n M/x^n$ und es gilt

$$\varprojlim_n M/x^n = (\varprojlim_n M_0/x^n)^a.$$

Als letztes brauchen wir nun noch den Begriff von Flachheit für V^a-Moduln bzw. V^a-Algebren. Dabei heißt ein V^a-Modul M flach, wenn der der Funktor

$$V^a\text{-}\mathbf{Mod} \to V^a\text{-}\mathbf{Mod} \quad ; \quad N \mapsto M \otimes N$$

exakt ist. Wir geben folgende Charakterisierung ohne Beweis an.

Satz 3.4.22 ([Sch12b, Definition/Proposition 4.7 (i)]). *Ein V^a-Modul $M = (M_0)^a$ ist genau dann flach, wenn für alle V-Moduln X und alle $i > 0$ die Moduln $\mathrm{Tor}_i^V(M_0, X)$ fast-null sind.*

Bemerkung 3.4.23. Wegen des natürlichen Isomorphismus $M \to (M_*)^a$ ist ein V^a-Modul M genau dann flach wenn $(M_*)^a$ flach ist genau dann, wenn für alle V-Moduln und alle $i > 0$ die Moduln $\mathrm{Tor}_i^V(M_*, X)$ fast-null sind.

4 Perfektoide K-Algebren

In diesem Kapitel definieren wir perfektoide Körper K, perfektoide K-Algebren R (Abschnitt 4.1) und beschreiben den Tilt $K^\flat$ eines perfektoiden Körpers K (Abschnitt 4.2). Danach zeigen wir einen Teil der Äquivalenz zwischen perfektoiden K-Algebren und perfektoiden $K^\flat$-Algebren (Abschnitt 4.3).
Der Beweis der gesamten Äquivalenz setzt die Theorie der Kotangentkomplexe im Almost Setting voraus und war im Umfang dieser Arbeit nicht möglich. Dafür haben wir eine ausführliche Darstellung der ausgewählten Beweise gewählt, die [Sch12b] folgt. Wir benutzen dabei viele Ergebnisse, die wir in den vorhergehenden Kapiteln erarbeitet haben.

4.1 Definitionen und Folgerungen

Wir erinnern daran, dass ein Ring R der Charakteristik p dann *perfekt* heißt, wenn die Frobeniusabbildung

$$\Phi : R \to R \quad ; \quad x \mapsto x^p$$

surjektiv ist. Die Frobeniusabbildung ist ein Ringhomomorphismus, wenn R von Charakteristik p ist.

Scholze definiert *perfektoide Körper* und *perfektoide K-Algebren*. Wir wollen hier die Definitionen sowie erste Eigenschaften angeben.

Definition 4.1.1 ([Sch12b, Definition 3.1]). Sei $(K, |\cdot|)$ ein vollständig, nicht-diskret bewerteter Körper, dessen Restklassenkörper $K^o/\mathfrak{m}$ von Charakteristik p ist. Wir nennen K einen *perfektoiden Körper*, wenn K^o/p perfekt ist.

Da $K^o/\mathfrak{m}$ Charakteristik p hat, gilt $|p| < 1$. Offenbar sind perfektoide Körper von Charakteristik p gerade die vollständig, nicht-trivial bewerteten, perfekten Körper: Bewertete, perfekte Körper sind immer nicht-diskret bewertet, da alle p^n-ten Wurzeln existieren.
Es folgt aus der Definition, dass auch $K^o/\mathfrak{m}$ perfekt ist; es ist nicht klar, ob die umgekehrte Richtung im Allgemeinen auch gilt. Siehe aber Korollar 4.3.5.

Definition 4.1.2 ([Sch12b, Definition 5.1 (i)]). Sei K ein perfektoider Körper. Sei $\varpi \in K^\times$ mit $|p| \leq |\varpi| < 1$. Eine *perfektoide K-Algebra* R ist eine vollständige, normierte K-Algebra, sodass

$$R^o = \{\, x \in R \;\mid\; x \text{ ist potenzbeschränkt } \}$$

in R beschränkt ist und R^o/ϖ perfekt ist.
Ein *Morphismus zwischen zwei perfektoiden K-Algebren* ist ein stetiger K-Algebra-Morphismus. Wir bezeichnen die Kategorie der perfektoiden K-Algebren mit K-**Perf**.

Beispiel 4.1.3. Ein perfektoider Körper K ist eine perfektoide K-Algebra.

Bemerkung 4.1.4. Wir werden später zeigen, dass diese Definition unabhängig von Wahl des Elements ϖ ist (Korollar 4.3.5).

In der folgenden Bemerkung fassen wir alle Eigenschaften von perfektoiden K-Algebren zusammen, die wir in allgemeinerer Form in Kapitel 2 bewiesen haben.

Bemerkung 4.1.5. Lemma 2.1.13 besagt, dass R eine treu normierte K-Algebra ist, insbesondere ist R nach Lemma 2.1.12 torsionsfrei. Daher ist R nach Satz 2.4.8 flach über K^o.
Weiterhin stimmen nach Korollar 2.2.15 metrische Beschränktheit und Beschränktheit im Sinne von Definition 2.2.7 überein. Aus Satz 2.2.10 folgt dann, dass R^o ein offen und abgeschlossener Unterring von R ist. Insbesondere ist R^o vollständig. Wir erinnern daran, dass $\bar{B}(0;1) \subset R^o$ gilt.
Nach Satz 2.2.18 ist ein K-Algebren-Morphismus f zwischen zwei perfektoiden Algebren R und S genau dann stetig, wenn $f(R^o) \subset S^o$ gilt. Das heißt, die Morphismen in der Kategorie K-**Perf** sind gerade die K-Algebra-Morphismen, deren Bilder von potenzbeschränkten Elementen wieder potenzbeschränkt sind.

Wir führen hier den Begriff einer *prä-perfektoiden* K-Algebra ein, denn unsere Beispiele von perfektoiden K-Algebren, insbesondere die überkonvergenten Potenzreihen aus Abschnitt 5.1 sind Vervollständigungen prä-perfektoider K-Algebren. Der Begriff *prä-perfektoid* wird von Scholze nicht verwendet.

Definition 4.1.6. Sei $(K, |\cdot|)$ ein nicht-diskret bewerteter Körper, dessen Restklassenkörper von Charakteristik p ist. Eine normierte K-Algebra R heißt *prä-perfektoid*, wenn R^o/p perfekt ist und R^o in R beschränkt ist.

Lemma 4.1.7.

(a) Sei K ein nicht-diskret bewerteter Körper, dessen Restklassenkörper $K^o/\mathfrak{m}$ von Charakteristik p ist. Sei weiterhin K^o/p perfekt, dann ist die Vervollständigung $\hat{K}$ von K ein perfektoider Körper.

(b) Ist $(R, |\cdot|)$ eine prä-perfektoide K-Algebra und K ein perfektoider Körper, so ist die Vervollständigung $\hat{R}$ von R eine perfektoide K-Algebra.

Beweis. Die Aussagen folgen sofort aus Satz 2.3.13 und der Tatsache, dass $\widehat{R}^o = \widehat{R^o}$ beschränkt ist, wenn R^o beschränkt ist. □

Beispiel 4.1.8. Bezeichne $\overline{\mathbb{Q}_p}$ den algebraischen Abschluss der p-adischen Zahlen. Dieser ist offensichtlich nicht-diskret bewertet; alle p^n-ten Wurzeln existieren, weshalb der Frobenius auf $\overline{\mathbb{Q}_p}$ surjektiv ist, inbesondere ist $(\overline{\mathbb{Q}_p})^o/p$ perfekt. Der Restklassenkörper von $\overline{\mathbb{Q}_p}$ ist der algebraische Abschluss von $\mathbb{Z}/p$, hat also Charakteristik p. Damit ist $\overline{\mathbb{Q}_p}$ prä-perfektoid und seine Vervollständigung $\mathbb{C}_p$ ist ein perfektoider Körper.

Das folgende Beispiel ist in [Sch12b, S. 245] genannt. Es ist der kleinste perfektoide Körper, der eine Körpererweiterung von $\mathbb{Q}$ mit der p-adischen Bewertung ist.

Beispiel 4.1.9. Sei K die Vervollständigung von $\mathbb{Q}_p(p^{1/p^\infty})$, siehe Beispiel 2.4.3. Dann ist K ein perfektoider Körper: es reicht nach Beispiel 2.4.4 und Lemma 4.1.7 zu zeigen, dass $\mathbb{Z}_p[p^{1/p^\infty}]/p$ perfekt ist. Wir behaupten

$$(\mathbb{Z}/p)[p^{1/p^\infty}] \cong \mathbb{Z}_p[p^{1/p^\infty}]/p$$

Auf der linken Seite ist der Frobenius offenbar surjektiv. Die Abbildung $(\mathbb{Z}/p)[p^{1/p^\infty}] \to \mathbb{Z}_p[p^{1/p^\infty}]/p$ ist durch

$$\sum \overline{a}_i p^{i/p^m} \mapsto \sum a_i p^{i/p^m} \mod p$$

gegeben, wobei $\overline{a}_i \in \mathbb{Z}/p$ mit Repräsentant $a_i \in \mathbb{Z}$ ist. Außerdem können wir ohne Einschränkung $i < m$ annehmen. Die Abbildung ist wohldefiniert und ein Isomorphismus; letzteres folgt aus der Tatsache, dass nach Beispiel 2.4.2 bereits $\mathbb{Z}/p \cong \mathbb{Z}_p/p$ gilt.

Zu Beispielen perfektoider K-Algebren kommen wir in Kapitel 5.

Wir benötigen im nächsten Abschnitt das

Lemma 4.1.10 ([Sch12b, Lemma 3.2])**.** *Sei $(K, |\cdot|)$ ein perfektoider Körper, dann ist die Gruppe $|K^\times|$ bereits p-teilbar. Das heißt für alle $y \in K^\times$ gibt es ein $x \in K^\times$ so, dass $|x|^p = |y|$ gilt.*

Wir führen den Beweis des Lemmas etwas ausführlicher als in [Sch12b].

Beweis von Lemma 4.1.10. Sei $x \in K^\times$. Da $x \in K^o$ oder $x^{-1} \in K^o$, können wir ohne Einschränkung annehmen, dass $x \in K^o$. Da $\bigcap_n (p^n) = 0$, können wir $x = p^m y$ mit $|y| > |p|$ schreiben. Da die Bewertung auf K nicht-diskret ist, gibt es ein $a \in K^\times$ mit $|p| < |a| < 1$. Für $b = a^{-1}p$ gilt dann ebenfalls $|p| < |b| < 1$. Indem wir $p = ab$ schreiben, reicht es zu zeigen, dass es für alle $z \in K^\times$ mit $|p| < |z| \leq 1$ ein $z' \in K^\times$ mit $|z| = |z'|^p$ gibt. Für $|z| = 1$ können wir $z' = z$ wählen. Ansonsten gibt es ein $z' \in K^o$ mit $(z')^p \equiv z \mod p$, weil der Frobenius nach Voraussetzung surjektiv auf K^o/p ist. Mit Satz 2.1.2 (d) ergibt sich dann

$$|z'|^p = |(z')^p| = |z + pc| = \max(|z|, |cp|) = |z|$$

für ein $c \in K^o$. Es ist nämlich $|cp| \leq |p| < |z|$. $\square$

4.2 Der Tilt $K^\flat$ eines perfektoiden Körpers K

In diesem Abschnitt definieren wir den Tilt $K^\flat$ eines perfektoiden Körpers K und zeigen, dass dies einen Funktor von der Kategorie der perfektoiden Körper in die Kategorie der perfektoiden Körper von Charakteristik p definiert. Im Wesentlichen stellen wir das Lemma 3.4. aus Scholzes *Perfectoid Spaces* vor und führen den Beweis, der in [Sch12b] teilweise sehr knapp ist, ausführlich.

Sei in diesem Abschnitt K ein perfektoider Körper mit Bewertungsring K^o. Wir bezeichnen die Frobeniusabbildung auf K^o/ϖ mit $\Phi : \bar{x} \mapsto \bar{x}^p$. Für ein Element $\varpi \in K^\times$ mit $|p| \leq |\varpi| < 1$ betrachten wir den projektiven Limes

$$\varprojlim_{\Phi} K^o/\varpi = \left\{ (\bar{x}_0, \bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots) \in \prod K^o/\varpi \;\middle|\; \bar{x}_i^p = \bar{x}_{i-1} \right\}$$

zusammen mit der projektiven-Limes Topologie, die von den diskreten Topologien auf K^o/ϖ induziert werden.

Bemerkung 4.2.1. Die Mengen $x + (\varpi) = \overline{B}(x; |\varpi|) \subset K^o$ sind nach Satz 2.2.5 (d) offen. Die diskrete Topologie auf K^o/ϖ stimmt also mit der Quotientenraum-Topologie auf K^o/ϖ überein, vergleiche [Sch12b, S. 264].

Wir untersuchen erste Eigenschaften des Ringes $\varprojlim_{\Phi} K^o/\varpi$; der erste Teil des folgenden Satzes ist eine Aussage aus [Sch12b, S. 264].

Satz 4.2.2. *Sei K ein perfektoider Körper, dann ist der oben definierte Ring $\varprojlim_{\Phi} K^o/\varpi$ ein perfekter Ring von Charakteristik p. Darüber hinaus ist die Frobeniusabbildung $x \mapsto x^p$ ein Homöomorphismus. Insbesondere sind die p^i-ten Wurzeln eindeutig bestimmt.*

Beweis. Es ist $|p| \leq |\varpi|$, daher $p = 0$ in $K^o/(\varpi)$ und damit auch $p = 0$ in $\varprojlim_{\Phi} K^o/\varpi$. Der Ring $\varprojlim_{\Phi} K^o/\varpi$ ist folglich von Charakteristik p. Sei $x = (\bar{x}_0, \bar{x}_1, \dots) \in \varprojlim_{\Phi} K^o/\varpi$, dann ist nach Definition

$$(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots)^p = (\bar{x}_1^p, \bar{x}_2^p, \dots) = (\bar{x}_0, \bar{x}_1, \dots) = x$$

und es gilt Surjektivität der Frobeniusabbildung. Wir zeigen nun, dass sie injektiv ist. Seien dazu $x = (\bar{x}_0, \bar{x}_1, \dots) \in \varprojlim_{\Phi} K^o/\varpi$ und $y = (\bar{y}_0, \bar{y}_1, \dots) \in \varprojlim_{\Phi} K^o/\varpi$ mit $x^p = y^p$. Dann ist

$$x_i \equiv x_{i+1}^p \equiv y_{i+1}^p \equiv y_i \mod \varpi,$$

also $x = y$.
Für die Stetigkeit der Abbildungen $x \mapsto x^p$ und $x \mapsto x^{1/p}$ reicht es zu zeigen, dass die Verknüpfung mit den m-ten Projektionen $\pi_m : \varprojlim_{\Phi} K^o/\varpi \to K^o/(\varpi)$ stetig sind. Es ist aber $\pi_m \circ (\cdot)^p = (\cdot)^p \circ \pi_m$ stetig, ebenso wie $\pi_m \circ (\cdot)^{1/p} = \pi_{m+1}$. $\square$

Wir teilen [Sch12b, Lemma 3.4] der Übersichtlichkeit wegen auf und beweisen die Teile einzeln, was uns den Raum für Zwischenbemerkungen ermöglicht.

Satz 4.2.3 ([Sch12b, Lemma 3.4 (i)])**.** *Die Projektionen $K^o \to K^o/\varpi$ induzieren einen multiplikativen Homöomorphismus*

$$\varprojlim_{x \mapsto x^p} K^o \to \varprojlim_{\Phi} K^o/\varpi.$$

Wir erhalten eine multiplikative, stetige Abbildung

$$\varprojlim_{\Phi} K^o/\varpi \to K^o \quad ; \quad x \mapsto x^\sharp,$$

die durch $x = (\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots) \mapsto x^\sharp = \lim_{i\to\infty} x_i^{p^i}$ gegeben ist.

Ein wichtiges Argument im Beweis ist das

Lemma 4.2.4. *Sei K ein perfektoider Körper und $\varpi \in K^\times$ mit $|p| \leq |\varpi| < 1$. Seien $x, y \in K^o$ mit $x - y \in (\varpi)$. Dann gilt für alle $i \in \mathbb{N}$, dass*

$$x^{p^i} - y^{p^i} \in (\varpi^{i+1}).$$

Beweis. Vergleiche [Sch12b, S. 265].]Wir beweisen durch Induktion über $i \in \mathbb{N}$, wobei der Fall $i = 0$ gerade die Voraussetzung ist. Sei also die Aussage für $i \in \mathbb{N}$ bewiesen. Dann ist

$$(x^{p^{i+1}} - y^{p^{i+1}}) = (y^{p^i} + (x^{p^i} - y^{p^i}))^p - y^{p^{i+1}} = (y^{p^i} + z\varpi^{i+1})^p - y^{p^{i+1}}$$

für ein $z \in K^o$. Wegen $|p| \leq |\varpi|$ gilt $p \in (\varpi)$ und es gibt ein $z' \in K^o$ so, dass

$$(x^{p^{i+1}} - y^{p^{i+1}}) = y^{p^{i+1}} + z^p\varpi^{(i+1)p} + p\varpi^{i+1}z' - y^{p^{i+1}} \in (\varpi^{i+2}).$$ □

Der erste Teil im Beweis des obigen Satzes ist die Konstruktion einer Abbildung $x \mapsto x^\sharp$, die in [Sch12b] gegeben ist.

Lemma 4.2.5. *Die Zuordnung*

$$x = (\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots) \mapsto x^\sharp = \lim_{i\to\infty} x_i^{p^i}$$

definiert eine stetige, multiplikative Abbildung $\varprojlim_\Phi K^o/\varpi \to K^o$. Dabei sind die $x_i \in K^o$ Lifts der $\bar{x}_i \in K^o/\varpi$.
Weiterhin gilt $|x^\sharp - x_i^{p^i}| \leq |\varpi|^{i+1}$.

Bemerkung 4.2.6. Die Zuordnung $(\cdot)^\sharp : \varprojlim_\Phi K^o/\varpi \to K^o$ ist im Allgemeinen nicht additiv. Ist K zum Beispiel eine Körpererweiterung von $\mathbb{Q}_p$ und $p = \varpi = 3$, so ist $1^\sharp = 1$, aber

$$2^\sharp = \lim_{i\to\infty} 2^{3^i} \neq 2 = 1^\sharp + 1^\sharp,$$

da $(2^{3^i} - 2) \equiv -3 \mod 9$ für alle natürlichen Zahlen $i > 0$.

Aus der Konstruktion ist aber klar, dass $(x+y)^\sharp \equiv x^\sharp + y^\sharp \mod \varpi$ gilt. Ist $x_0 \in K^o$, so gibt es, da $\varprojlim_\Phi K^o/\varpi$ perfekt ist, ein Element $x = (\bar{x}_0, \bar{x}_1, \dots) \in \varprojlim_\Phi K^o/\varpi$ und nach Lemma 4.2.5 ergibt sich $x^\sharp \equiv x_0 \mod \varpi$. Aus diesen beiden Aussagen folgt, dass die Abbildung $(\cdot)^\sharp$ einen surjektiven Ringhomomorphismus

$$\varprojlim_\Phi K^o/\varpi \to K^o/\varpi$$

induziert.

Wir erhalten weiterhin für alle $i \in \mathbb{N}$ stetige, multiplikative Abbildungen $\varprojlim_\Phi K^o/\varpi \to K^o/\varpi; x \mapsto (x^{1/p^i})^\sharp$. Diese induzieren offensichtlich eine stetige, multiplikative Abbildung

$$\varprojlim_\Phi K^o/\varpi \to \varprojlim_{x\mapsto x^p} K^o \quad ; \quad x \mapsto (x^\sharp, (x^{1/p})^\sharp, \dots, (x^{1/p^i})^\sharp, \dots).$$

Man beachte, dass $\varprojlim_{x\mapsto x^p} K^o$ auf kanonische Weise kein Ring ist, solange der Frobenius auf K^o nicht additiv ist.

Beweis von Satz 4.2.3. Die Projektionen $\varprojlim_{x\mapsto x^p} K^o \to K^o/\varpi$ definieren offensichtlich eine stetige Abbildung

$$f : \varprojlim_{x\mapsto x^p} K^o \to \varprojlim_\Phi K^o/\varpi.$$

Es reicht wegen Lemma 4.2.5 zu zeigen, dass diese invers zu der Abbildung

$$g : \varprojlim_\Phi K^o/\varpi \to \varprojlim_{x\mapsto x^p} K^o \quad ; \quad x \mapsto (x^\sharp, (x^{1/p})^\sharp, \dots, (x^{1/p^i})^\sharp, \dots)$$

ist. Sei zunächst $(x_0, x_1, x_2, \dots) \in \varprojlim_{x\mapsto x^p} K^o$. Insbesondere gilt für alle $i \in \mathbb{N}$, dass $x_{i+1}^p = x_i$. Das Element wird unter f auf $x = (\bar{x}_0, \bar{x}_1, \dots) \in \varprojlim_\Phi K^o/\varpi$ abgebildet. Wir müssen nun zeigen, dass $x_i = (x^{1/p^i})^\sharp$ für alle $i \in \mathbb{N}$ gilt.
Es ist $x^{1/p^i} = (\bar{x}_i, \bar{x}_{i+1}, \dots)$ und daher $(x^{1/p^i})^\sharp = \lim_n x_{i+n}^{p^n} = \lim_n x_i = x_i$.
Sei umgekehrt $x = (\bar{x}_0, \bar{x}_1, \dots) \in \varprojlim_\Phi K^o/\varpi$ mit Lifts $x_i \in K^o$ von $\bar{x}_i \in K^o/\varpi$. Wir müssen zeigen, dass für alle $i \in \mathbb{N}$ bereits $(x^{1/p^i})^\sharp \equiv x_i \mod \varpi$ gilt. Dies folgt aber sofort aus der zweiten Aussage von Lemma 4.2.5. □

Beweis von Lemma 4.2.5. Wir zeigen zuerst die Wohldefiniertheit der Zuordnung $x = (\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots) \mapsto \lim_{i\to\infty} x_i^{p^i}$: Sei $(x_i)_i$ eine Wahl von Lifts der $\bar{x}_i \in K^o/\varpi$. Da $x \in \varprojlim_\Phi K^o/\varpi$, gilt $x_{i+1}^p \equiv x_i \mod \varpi$. Aus Lemma 4.2.4 folgt

$$|x_{i+1}^{p^{i+1}} - x_i^{p^i}| \ \le |\varpi|^{i+1}.$$

Insbesondere ist $(x_i^{p^i})_i$ eine Cauchyfolge in K^o und wegen der Vollständigkeit existiert $x^\sharp = \lim_{i\to\infty} x_i^{p^i}$. Ist $(x_i')_i$ eine andere Wahl von Lifts, so folgt wiederum aus Lemma 4.2.4, dass $(x_i^{p^i} - (x_i')^{p^i})_i$ eine Nullfolge ist. Das heißt, wir haben $\lim_{i\to\infty} x_i^{p^i} = \lim_{i\to\infty}(x_i')^{p^i}$ und $x^\sharp$ ist wohldefiniert.
Die Abschätzung $|x^\sharp - x_i^{p^i}| \le |\varpi|^{i+1}$ folgt sofort aus der obigen Berechnung.

Die Multiplikativität ist per Konstruktion erfüllt, wir müssen also noch Stetigkeit zeigen. Sei dazu $x \in \varprojlim_\Phi K^o/\varpi$ und $\varepsilon > 0$. Es reicht zu zeigen, dass es eine offene Umgebung von x in $\varprojlim_\Phi K^o/\varpi$ gibt, die unter $(\cdot)^\sharp$ in die offene Menge $\bar{B}(x^\sharp; \varepsilon) \subset K^o$ abgebildet wird. Wir können ohne Einschränkung $\varepsilon = |\varpi|^{j+1}$ für ein $j \in \mathbb{N}$ annehmen. Die Menge

$$\left\{ y = (\bar{y}_0, \bar{y}_1, \dots) \in \varprojlim_\Phi K^o/\varpi \right|$$
$$\left| \text{es gibt Lifts } x_j, y_j \in K^o \text{ von } \bar{x}_j, \bar{y}_j \in K^o/\varpi \text{ mit } |x_j^{p^j} - y_j^{p^j}| \le |\varpi|^{j+1} \right\}$$

ist in $\varprojlim_\Phi K^o/\varpi$ offen. Mit der verschärften Dreiecksungleichung und der zweiten Aussage aus Lemma 4.2.4 folgt für y aus dieser Menge

$$|x^\sharp - y^\sharp| = |(x^\sharp - x_j^{p^j}) + (x_j^{p^j} - y_j^{p^j}) + (y_j^{p^j} - y^\sharp)| \ \le |\varpi|^{j+1}\},$$

was zu zeigen war. □

Bemerkung 4.2.7. Wegen Satz 4.2.3 können wir im Folgenden für ein Element $x = (\bar{x}_0, \bar{x}_1, \dots) \in \varprojlim_\Phi K^o/\varpi$ ohne Einschränkung

$$x_i = (x^{1/p^i})^\sharp$$

annehmen. Insbesondere gilt

$$x^\sharp = \lim_{i\to\infty}((x^{1/p^i})^\sharp)^{p^i}.$$

Man kann über die Abbildung $(\cdot)^\sharp : \varprojlim_\Phi K^o/\varpi \to K^o$ eine Bewertung auf $\varprojlim_\Phi K^o/\varpi$ definieren, wie das folgende Lemma zeigt.

Lemma 4.2.8. *Die Zuordnung*

$$|\cdot|_\sharp : \varprojlim_\Phi K^o/\varpi \to \mathbb{R}_{\ge 0} \quad ; \quad x \mapsto |x^\sharp|_{K^o}$$

definiert eine Bewertung auf $\varprojlim_\Phi K^o/\varpi$. Es gilt $|\varprojlim_\Phi K^o/\varpi|_\sharp = |K^o|$.
Außerdem stimmt die von $|\cdot|_\sharp$ induzierte Topologie mit der projektiven Limes-Topologie auf $\varprojlim_\Phi K^o/\varpi$ überein und $\varprojlim_\Phi K^o/\varpi$ ist vollständig.

Beweis. Wir überprüfen die Axiome einer Bewertung. Seien $x, y \in \varprojlim_{\Phi} K^o/\varpi$. Wegen der Injektivität von $\varprojlim_{\Phi} K^o/\varpi \to \varprojlim_{x\mapsto x^p} K^o$ ist klar, dass $x^\sharp = 0$ genau dann gilt, wenn $x = 0$. Es ergibt sich also $|x^\sharp| = 0$ genau dann, wenn $x = 0$. Ebenso folgt die Multiplikativität von $|\cdot|_\sharp$ aus der Multiplikativität von $(\cdot)^\sharp$. Die verschärfte Dreiecksungleichung ergibt sich wie im Beweis zu [Sch12b, Proposition 3.6]:

$$\begin{aligned}|x-y|_\sharp = |(x-y)^\sharp| = |\lim_{i\to\infty}((x^{1/p^i})^\sharp - (y^{1/p^i})^\sharp)^{p^i}| = \lim_{i\to\infty}|(x^{1/p^i})^\sharp - (y^{1/p^i})^\sharp|^{p^i} &\leq \\ \leq \lim_{i\to\infty}\max(|(x^{1/p^i})^\sharp|, |(y^{1/p^i})^\sharp|)^{p^i} = \max(\lim_{i\to\infty}|(x^{1/p^i})^\sharp|^{p^i}, \lim_{i\to\infty}|(y^{1/p^i})^\sharp|^{p^i}) &= \\ = \max(|x|_\sharp, |y|_\sharp).&\end{aligned}$$

Es ist klar, dass $|\varprojlim_{\Phi} K^o/\varpi|_\sharp \subset |K^o|$ gilt. Die umgekehrte Inklusion ist eine Verallgemeinerung von [Sch12b, Lemma 3.4 (ii)]. Sei $y \in K^o - \{0\}$ gegeben, dann gibt es ein $n \in \mathbb{N}$ mit $|\varpi^n| < |y|$. Nach Lemma 4.1.10 gibt es ein Element $x_n \in K^o$ mit $|x_n|^{p^n} = |y| > |\varpi^n|$. Wir fixieren n an dieser Stelle. Da der Frobenius auf K^o/ϖ surjektiv ist, gibt es also ein Element

$$x = (\underbrace{0,\ldots,0}_{n}, \bar{x}_n, \bar{x}_{n+1}, \ldots) \in \varprojlim_{\Phi} K^o/\varpi.$$

Nach Lemma 4.2.5 ergibt sich wegen $|x^\sharp - x_n^{p^n}| < |\varpi^n|$ und der verschärften Dreiecksungleichung

$$|x^\sharp| = |x^\sharp - x_n^{p^n} + x_n^{p^n}| = |x_n^{p^n}| = |y|.$$

Da $\varprojlim_{\Phi} K^o/\varpi$ sowohl mit der Bewertungstopologie als auch mit der projektiven Limes-Topologie ein topologischer Ring ist, reicht es zu zeigen, dass eine Menge $U \subset \varprojlim_{\Phi} K^o/\varpi$ mit $0 \in U$ genau dann Umgebung der 0 in der einen Topologie ist, wenn U Umgebung der 0 in der anderen Topologie ist. Sei ohne Einschränkung

$$U = \underbrace{\{0\} \times \cdots \times \{0\}}_{n+1} \times K^o/\varpi \times \cdots$$

eine Umgebung der 0 in der projektiven Limes-Topologie. Es reicht nun zu zeigen, dass $U = \bar{B}(0; |\varpi|^{p^n})$ gilt. Sei zunächst $x \in U$, dann gilt wegen $(x^{1/p^n})^\sharp \equiv 0 \mod \varpi$,

$$|x|_\sharp = |(x^\sharp)^{1/p^n}|^{p^n} = |(x^{1/p^n})^\sharp|^{p^n} \leq |\varpi|^{p^n}.$$

Es ist also $x \in \bar{B}(0; |\varpi|^{p^n})$. Umgekehrt folgt aus $|x|_\sharp \leq |\varpi|^{p^n}$, dass

$$|(x^{1/p^m})^\sharp| = |x^\sharp|^{1/p^m} \leq |\varpi|^{p^{n-m}} \leq |\varpi|$$

für $m \leq n$, also $x \in U$.
Sei als letztes nun $(x_\alpha)_{\alpha\in\mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge in $\varprojlim_{\Phi} K^o/\varpi$. Dann sind auch die Folgen $(x_\alpha^{1/p^n})_\alpha$ Cauchyfolgen, denn es gilt wegen Charakteristik p

$$|(x_{\alpha+1}^{1/p^n} - x_\alpha^{1/p^n})^\sharp| = |(x_{\alpha+1} - x_\alpha)^\sharp|^{1/p^n}.$$

Die Abbildung $(\cdot)^\sharp$ ist stetig und K^o ist vollständig, also sind die Folgen $((x_\alpha^{1/p^n})^\sharp)_\alpha$ konvergente Cauchyfolgen. Seien $y_n \in K^o$ die jeweiligen Grenzwerte. Dann ist

$$(y_n)^{p^n} = (\lim_\alpha (x^{1/p^n})^\sharp)^{p^n} = \lim_\alpha x_\alpha = y_0$$

und $y = (\bar{y}_0, \bar{y}_1, \ldots) \in \varprojlim_\Phi K^o/\varpi$ ist der Grenzwert von der Folge $(x_\alpha)_\alpha$, denn

$$|y - x_\alpha|_\sharp = |(y - x_\alpha)^\sharp| = |\lim_{n\to\infty}(y_n^{p^n} - (x^{1/p^n})^\sharp)| = |y_0 - \lim_{n\to\infty}(x^{1/p^n})^\sharp| = |y_0 - (x_\alpha)^\sharp|$$

konvergiert gegen 0 für $\alpha \to \infty$. □

Wir zeigen nun an dieser Stelle, dass $\varprojlim_\Phi K^o/\varpi$ unabhängig von Wahl des Elementes ϖ ist, wie in [Sch12b, Remark 3.5] bemerkt wird. Es gilt nämlich das

Lemma 4.2.9. *Seien $\varpi, \varpi' \in K^\times$ mit $|p| \leq |\varpi|, |\varpi'| < 1$. Dann gibt es einen isometrischen Ring-Isomorphismus*

$$\varprojlim_\Phi K^o/\varpi \to \varprojlim_\Phi K^o/\varpi'.$$

Beweis. Wir wissen aus Satz 4.2.3, dass die Abbildung

$$\varprojlim_\Phi K^o/\varpi \to \varprojlim_{x\mapsto x^p} K^o \to \varprojlim_\Phi K^o/\varpi' \quad ; \quad x \mapsto (x^\sharp \mod \varpi', (x^{1/p})^\sharp \mod \varpi', \ldots)$$

multiplikativ und bijektiv ist. Aus der Konstruktion von $(\cdot)^\sharp : \varprojlim_\Phi K^o/\varpi \to K^o$ ist klar, dass $(x+y)^\sharp - x^\sharp - y^\sharp$ durch p, also wegen $|p| \leq |\varpi'|$ auch durch ϖ' teilbar ist. Da der Frobenius auf $\varprojlim_\Phi K^o/\varpi$ additiv ist, folgt daraus die Additivität der Abbildung $\varprojlim_\Phi K^o/\varpi \to \varprojlim_\Phi K^o/\varpi'$.
Ist $y \in \varprojlim_\Phi K^o/\varpi'$ das Bild von $x \in \varprojlim_\Phi K^o/\varpi$, so ist nach Konstruktion $y^{\sharp'} = x^\sharp$. Das bedeutet insbesondere, dass es sich bei dem Isomorphismus tatsächlich um eine Isometrie handelt. □

Wir können also ohne Einschränkung annehmen, dass ϖ alle p^n-ten Wurzeln in K^o hat, indem wir $\varpi = (\varpi^\flat)^\sharp$ setzen.

Wir können nun den Tilt eines perfektoiden Körpers K definieren. Wir werden sehen, dass die Konstruktion unabhängig von allen Wahlen ist, weshalb wir von *dem* Tilt sprechen.

Definition 4.2.10. Sei K ein perfektoider Körper. Sei $\varpi \in K^\times$ ein Element mit $|p| \leq |\varpi| < 1$ und $\Phi : K^o/\varpi \to K^o\varpi$ die Frobeniusabbildung. Sei

$$\varprojlim_\Phi K^o/\varpi \to K^o \quad ; \quad x \mapsto x^\sharp$$

die Abbildung aus Lemma 4.2.5. Sei weiterhin $\varpi^\flat \in \varprojlim_\Phi K^o/\varpi$ ein Element mit

$$|\varpi^{\flat\sharp}| = |\varpi|.$$

Dann definieren wir den *Tilt von K* als

$$K^\flat = (\varprojlim_\Phi K^o/\varpi)[(\varpi^\flat)^{-1}]$$

mit der direkten Limes-Topologie aus Abschnitt 2.5.

Die Existenz des Elementes $\varpi^\flat$ folgt aus $|\varprojlim_\Phi K^o/\varpi|_\sharp = |K^o|$. In [Sch12b] ist die Existenz durch Lemma 3.4 (ii) gegeben. Wir merken weiterhin an, dass in [Sch12b] die Fragen der Topologie nicht detailliert werden. Der nächste Satz besagt, dass $K^\flat$ ein perfektoider Körper ist.

Satz 4.2.11 ([Sch12b, Lemma 3.4. (iii)]). *Es gibt einen multiplikativen Homöomorphismus*

$$K^\flat \cong \varprojlim_{x\mapsto x^p} K.$$

Insbesondere gibt es eine multiplikative, stetige Abbildung $K^\flat \to K; x \mapsto x^\sharp$ und die Topologie von $K^\flat$ ist durch die Bewertung $|x|_{K^\flat} = |x^\sharp|_K$ induziert.
Damit ist $K^\flat$ ein perfektoider Körper von Charakteristik p, es gilt $|K^{\flat\times}| = |K^\times|$ und $(K^\flat)^o = \varprojlim_\Phi K^o/\varpi$ Weiterhin haben wir die Isomorphismen von Ringen

$$(K^\flat)^o/(\varpi^\flat) \cong K^o/(\varpi), \quad (K^\flat)^o/\mathfrak{m}^\flat \cong K^o/\mathfrak{m},$$

wobei $\mathfrak{m}$ bzw. $\mathfrak{m}^\flat$ das maximale Ideal von K^o bzw. $(K^\flat)^o$ ist.

Beweis. Wir identifizieren im Folgenden $\varprojlim_{x\mapsto x^p} K^o$ mit seinem Bild in $\varprojlim_{x\mapsto x^p} K$ und erhalten so eine injektive, multiplikative Abbildung $\varprojlim_\Phi K^o/\varpi \to \varprojlim_{x\mapsto x^p} K$. Es ist offensichtlich, dass $\varprojlim_{x\mapsto x^p} K - \{0\}$ eine abelsche Gruppe ist; insbesondere ist das Bild von $\varpi^\flat$ unter $\varprojlim_\Phi K^o/\varpi \to \varprojlim_{x\mapsto x^p} K$ invertierbar. Man erhält auf kanonische Weise eine multiplikative, injektive Abbildung

$$h: K^\flat = (\varprojlim_\Phi K^o/\varpi)[(\varpi^\flat)^{-1}] \to \varprojlim_{x\mapsto x^p} K.$$

Wir zeigen zunächst, dass h surjektiv ist, woraus folgt, dass $K^\flat$ ein Körper ist. Sei $x = (x_0, x_1, \ldots) \in \varprojlim_{x\mapsto x^p} K$, dann existiert ein $n \in \mathbb{N}$ mit $x_0(\varpi^{\flat n})^\sharp \in K^o$ und es ist

$$x' = (x_0(\varpi^{\flat n})^\sharp, x_1(\varpi^{\flat n/p})^\sharp, \ldots) \in \varprojlim_{x\mapsto x^p} K^o.$$

Sei $y \in \varprojlim_\Phi K^o/\varpi$ mit $h(y) = x'$ so ist $h(y(\varpi^\flat)^{-n}) = x$.

Wir setzen die Bewertung von $\varprojlim_{\Phi} K^o/\varpi$ auf kanonische Weise zu einer Bewertung von $K^\flat$ fort. Es ist klar, dass diese Bewertung wegen $|\varpi^{\flat\sharp}| = |\varpi|$ auch durch $|x|_{K^\flat} = |x^\sharp|$ gegeben werden kann, wobei hier $(\cdot)^\sharp$ die kanonische Abbildung $K^\flat \to K$ bezeichnet. Wir behaupten, dass dann

$$(K^\flat)^o = \varprojlim_{\Phi} K^o/\varpi$$

gilt.
Aus dieser Behauptung folgt dann mit Korollar 2.5.8, dass die Bewertungstopologie mit der direkten Limes-Topologie übereinstimmt. Weiterhin ist $\varprojlim_{x\mapsto x^p} K^o$ in $\varprojlim_{x\mapsto x^p} K$ offen und eine Umgebung der 0 und der 1. Da $\varprojlim_{x\mapsto x^p} K - \{0\}$ eine multiplikative Gruppe ist, genügt es für die Homöomorphie von h zu zeigen, dass h an 0 und 1 offen und stetig ist. Da $h_{|K^{\flat o}}$ einen Homöomorphismus $\varprojlim_{\Phi} K^o/\varpi \to \varprojlim_{x\mapsto x^p} K^o$ induziert, ist dies tatsächlich der Fall.
Wir zeigen nun die obige Behauptung: Es ist klar, dass $\varprojlim_{\Phi} K^o/\varpi \subset (K^\flat)^o$ gilt. Sei umgekehrt $x \in (K^\flat)^o$, das heißt $|x^\sharp| \leq 1$. Daraus folgt, dass auch $(x^{1/p^n})^\sharp \in K^o$ gilt. Damit ist $h(x) \in \varprojlim_{x\mapsto x^p} K^o$ und wegen der Injektivität von h folgt $x \in \varprojlim_{\Phi} K^o/\varpi$.
Wir haben in Lemma 4.2.8 gesehen, dass $K^{\flat o}$ vollständig ist und $|K^{\flat o}|_\sharp = |K^o|$. Daraus folgt mit Lemma 2.3.14 , dass $K^\flat$ vollständig ist. Die Gleichheit $|K^{\flat\times}|_{K^\flat} = |K^\times|$ ergibt sich, weil $K^\flat$ Quotientenkörper von $K^{\flat o}$ ist.

Als letztes zeigen wir, dass es kanonische Isomorphismen von Ringen

$$(K^\flat)^o/(\varpi^\flat) \cong K^o/(\varpi), \quad (K^\flat)^o/\mathfrak{m}^\flat \cong K^o/\mathfrak{m}$$

gibt; aus erstem folgt dann zusammen mit dem Vorhergehenden, dass $K^\flat$ ein perfektoider Körper ist. In Bemerkung 4.2.6 haben wir gesehen, dass $(\cdot)^\sharp$ einen surjektiven Ringhomomorphismus $\varprojlim_{\Phi} K^o/\varpi \to K^o/\varpi$ induziert. Es ist einfach zu sehen, dass $(\varpi^\flat)$ gerade sein Kern ist: Wir haben $x^\sharp \in (\varpi)$ genau dann, wenn $|x^\sharp| \leq |\varpi| = |\varpi^{\flat\sharp}|$ genau dann, wenn $|x|_{K^\flat} \leq |\varpi^\flat|_{K^\flat}$ genau dann, wenn $x \in (\varpi^\flat)$, nach Lemma 2.4.6. Analog zeigt man, dass die Surjektion $\varprojlim_{\Phi} K^o/\varpi \to K^o/\mathfrak{m}$ gerade den Kern $\mathfrak{m}^\flat$ hat. □

Der nächste Satz besagt, dass der Tilt unabhängig von den in der Konstruktion getroffenen Wahlen ist.

Satz 4.2.12. *Sei K ein perfektoider Körper und seien $\varpi, \varpi' \in K^\times$ zwei Elemente mit $|p| \leq |\varpi|, |\varpi'| < 1$. Bezeichne die jeweiligen Tilts mit $K^\flat$ bzw. $K^{\flat\prime}$. Dann gibt es einen isometrischen Isomorphismus $K^\flat \to K^{\flat\prime}$.*

Beweis. Für zwei Wahlen von ϖ und ϖ' gibt es nach Lemma 4.2.9 einen isometrischen Ringisomorphismus $i : (K^\flat)^o \to (K^{\flat\prime})^o$. Da $K^\flat$ und $K^{\flat\prime}$ Quotientenkörper ihrer Bewertungsringe sind, kann man i zu einem isometrischen Isomorphismus von Körpern $i : K^\flat \to K^{\flat\prime}$ fortsetzen. □

Sind K, L zwei perfektoide Körper und $K \to L$ eine Körpererweiterung, so erhalten wir auf kanonische Weise eine Körpererweiterung $K^\flat \to L^\flat$. Wir können also tatsächlich von dem *Funktor* Tilt von der Kategorie der perfektoiden Körper in die Kategorie der perfektoiden Körper von Charakteristik p sprechen. Insbesondere ist der Tilt $K^\flat$ eines perfektoiden Körpers K von Charakteristik p gerade wieder K ([Sch12b, Lemma 3.4 (iv)]): Perfektoide Körper von Charakteristik p sind perfekt und daraus folgt

$$K^\flat = \varprojlim_{x \mapsto x^p} K = K.$$

Es stellt sich heraus, dass endliche Körpererweiterungen eines perfektoiden Körpers auch perfektoid sind. Der Tilt-Funktor induziert dann eine Grad-erhaltende Äquivalenz der Kategorien zwischen der Kategorie der endlichen Erweiterungen von K und der Kategorie der endlichen Erweiterungen von $K^\flat$ ([Sch12b, Theorem 3.7]). Dieser Satz wird in [Sch12b] mit den Methoden der Almost Ring Theory bewiesen, indem man zeigt, dass es eine Äquivalenz zwischen der Kategorie der perfektoiden K-Algebren und der Kategorie der perfektoiden $K^\flat$-Algebren gibt. Wir werden diese Äquivalenz im nächsten Abschnitt näher untersuchen.

Zum Abschluss dieses Abschnitts geben wir den Tilt $K^\flat$ von

$$K = \widehat{\mathbb{Q}_p(p^{1/p^\infty})}$$

an.

Beispiel 4.2.13 ([Sch12a, S. 3]). Der Tilt von $K = \widehat{\mathbb{Q}_p(p^{1/p^\infty})}$ ist durch

$$K^\flat = \widehat{(\mathbb{Z}/p)((t))(t^{1/p^\infty})}$$

gegeben. Dabei betrachten wir auf $(\mathbb{Z}/p)((t))(t^{1/p^\infty})$ die von der t-adischen Bewertung mit $\alpha = p$ (Beispiel 2.1.9) induzierte Bewertung.

Beweis. Da $K^\flat$ der Quotientenkörper von $\varprojlim_\Phi K^o/\varpi = \varprojlim_\Phi (\mathbb{Z}/p)[p^{1/p^\infty}]$ ist, reicht es zu zeigen, dass die durch

$$\sum_i \bar{a}_i t^{i/p^m} \mapsto \sum_i (\bar{a}_i, \bar{a}_i, \ldots) \cdot (0, p^{1/p}, \ldots)^{i/p^m}$$

induzierte Abbildung

$$\widehat{(\mathbb{Z}/p)[t][t^{1/p^\infty}]} \to \varprojlim_\Phi (\mathbb{Z}/p)[p^{1/p^\infty}]$$

ein Homöomorphismus ist. Wegen $|(0, p^{1/p}, p^{1/p^2}, \ldots)|_\sharp = |p| = 1/p = |t|$ ist die Abbildung eine Isometrie. Es ist noch die Surjektivität zu zeigen. Sei

$$x = (\sum_i^{n_0} \bar{a}_{0i} p^{i/p^{m_0}}, \sum_i^{n_1} \bar{a}_{1i} p^{i/p^{m_0}}, \ldots) \in \varprojlim_\Phi (\mathbb{Z}/p)[p^{1/p^\infty}]$$

gegeben, dann rechnet man mit den Definitionen nach, dass

$$(\sum_i^{n_j} \bar{a}_{ji} t^{i/p^{m_j}})_{j \in \mathbb{N}}$$

eine Cauchy-Folge in $\widehat{(\mathbb{Z}/p)[t][t^{1/p^\infty}]}$ ist, deren Grenzwert gerade auf x abgebildet wird. Wir sehen

$$K^{\flat o} = (\mathbb{Z}/p)[t][t^{1/p^\infty}] \cong (\mathbb{Z}/p)[p^{1/p^\infty}] = K^o/p. \qquad \square$$

4.3 Die Äquivalenz K-Perf $\cong K^\flat$-Perf

Wir zeigen in diesem Abschnitt die Äquivalenz K-**Perf** $\cong K^{oa}$-**Perf**. Weiterhin ist der Funktor K^{oa}-**Perf** $\to K^{oa}/\varpi$-**Perf** durch $A \to A/\varpi$ gegeben. Wir können ohne Einschränkung davon ausgehen, dass das Element $\varpi \in K^\times$ mit $|p| < |\varpi| < 1$ alle p^n-ten Wurzeln in K^o hat, vergleiche [Sch12b, Remark 3.5] oder Abschnitt 4.2, Seite 66.

Zuerst definieren wir die Kategorie K^{oa}-**Perf** für einen perfektoiden Körper K wie folgt.

Definition 4.3.1 ([Sch12b, Definition 5.1 (ii)]). Eine *perfektoide K^{oa}-Algebra A* ist eine flache K^{oa}-Algebra A, die ϖ-adisch vollständig ist und die Frobeniusabbildung einen Isomorphismus

$$\Phi : A/\varpi^{1/p} \to A/\varpi$$

induziert. Morphismen zwischen perfektoiden K^{oa}-Algebren sind die Morphismen zwischen K^{oa}-Algebren und wir bezeichnen die Kategorie der perfektoiden K^{oa}-Algebren mit K^{oa}-**Perf**.

In [Sch12b] wird nicht weiter ausgeführt, wie der Frobenius auf einer K^{oa}-Algebra A eigentlich definiert ist. Gemäß [GR03, Remark 2.2.15] definieren wir den Frobenius über die Abbildung $\phi : A_* \to A_*; x \mapsto x^p$ und erhalten $\phi^a : A_*^a \to A_*^a$ und mit Korollar 3.4.18 setzen wir den Frobenius als

$$\Phi = \epsilon_A^{-1} \circ \phi^a \circ \epsilon_A : A \to A_*^a \xrightarrow{\phi^a} A_*^a \to A.$$

Wir erinnern daran, dass für allgemein für einen K^{oa}-Modul $M = M_0^a$ der Quotient M/ϖ durch $(M_0/\varpi)^a$ gegeben ist. Weiterhin ist nach Bemerkung 3.4.21 die Kategorie K^{oa}-**Alg** vollständig und für eine K^{oa}-Algebra A exisitert der Limes $\varprojlim_n A/\varpi^n$. Analog zu Definition 2.5.2 heißt A also *ϖ-adisch vollständig*, wenn der kanonische Morphismus

$$A \to \varprojlim_n A/\varpi^n$$

ein Isomorphismus ist.

Wir verwenden [Sch12b, Lemma 5.3] und wiederholen den Beweis in größerer Ausführlichkeit. Wir erinnern daran, dass $\mathfrak{m}$ flach über K^o ist und wir deshalb für alle Aussagen aus der Almost Ring Theory $\widetilde{\mathfrak{m}} = \mathfrak{m}$ annehmen können. Insbesondere ist für einen K^{oa}-Modul M

$$M_* = \mathrm{Hom}_V(\mathfrak{m}, \mathfrak{m} \otimes M_0) = \mathrm{Hom}_V(\mathfrak{m}, M_0),$$

wobei die letzte Gleichung von Lemma 3.2.5 kommt.

Lemma 4.3.2 ([Sch12b, Lemma 5.3]). *Sei $M = M_0^a$ ein K^{oa}-Modul.*

(a) Der Modul M ist flach über K^{oa} genau dann, wenn M_* flach über K^o ist genau dann, wenn M_* keine ϖ-Torsion hat.

(b) Ist M_0 ein flacher K^o-Modul, dann ist M flach über K^{oa} und es gilt

$$M_* = \left\{ x \in M_0[\varpi^{-1}] \;\middle|\; \forall b \in \mathfrak{m} : bx \in M_0 \right\}.$$

(c) Ist M flach über K^{oa}, dann gilt für alle $x \in K^o$ bereits $(xM)_* = xM_*$. Außerdem ist $M/xM_* \subset (M/xM)_*$ und für alle $b \in \mathfrak{m}$ ist das Bild von $(M/xbM)_*$ in $(M/xM)_*$ gleich M/xM_*.

(d) Ist M flach über K^{oa}, dann ist M genau dann ϖ-adisch vollständig, wenn M_* bereits ϖ-adisch vollständig ist.

Beweis. (a) Satz 2.4.8 besagt, dass M_* genau dann flach über K^o ist, wenn M_* keine ϖ-Torsion hat. Nach Bemerkung 3.4.23 ist M genau dann flach über K^{oa}, wenn $\mathrm{Tor}_i^{K^o}(M_*, X)$ fast-null für alle K^o-Moduln X und alle $i > 0$ ist. Insbesondere ist also M flach über K^{oa}, wenn M_* flach über K^o ist.

Sei umgekehrt M flach über K^{oa}, dann ist $\mathrm{Tor}_1^{K^o}(M_*, K^o/\varpi)$ fast-null. Multiplikation mit ϖ ergibt folgende exakte Sequenz.

$$0 \to K^o \xrightarrow{\cdot\varpi} K^o \to K^o/\varpi \to 0$$

Nach Tensorieren mit M_* erhalten wir die exakte Sequenz

$$\mathrm{Tor}_1^{K^o}(M_*, K^o/\varpi) \to M_* \xrightarrow{\cdot\varpi} M_* \to M_*/\varpi \to 0$$

Das heißt der Kern der Multiplikation von $\cdot\varpi : M_* \to M_*$ ist fast-null. Da aber M_* nach Bemerkung 3.4.6 keine nicht-trivialen fast-null Elemente hat, folgt, dass die Multiplikation mit ϖ injektiv ist. Das heißt M_* hat keine ϖ-Torsion und ist damit flach über K^o.

(b) Nach Satz 3.4.22 ist $M = M_0^a$ flacher K^{oa}-Modul. Da M_0 keine ϖ-Torsion hat, können wir M_0 mit seinem Bild in der Lokalisierung $M_0[\varpi^{-1}]$ identifizieren. Wir überprüfen, dass die Gleichung

$$\mathrm{Hom}_{K^o}(\mathfrak{m}, M_0) = \left\{ x' \in \mathrm{Hom}_K(K, M_0[\varpi^{-1}]) \;\middle|\; \forall b \in \mathfrak{m} : x'(b) \in M_0 \right\}$$

gilt: Ist ein K^o-linearer Morphismus $x : \mathfrak{m} \to M_0$ gegeben, so kann dieser kanonisch zu einem $(K^o[\varpi^{-1}] = K)$-linearem Morphismus

$$x' = x[\varpi^{-1}] : \mathfrak{m}[\varpi^{-1}] = K \to M_0[\varpi^{-1}]$$

fortgesetzt werden. Für diesen gilt dann per Definition $x'(b) \in M_0$ für alle $b \in \mathfrak{m}$. Weiterhin folgt aus $x[\varpi^{-1}] = y[\varpi^{-1}]$ bereits $x = y$.
Sei umgekehrt $x' : K \to M_0[\varpi^{-1}]$ ein K-linearer Morphismus mit $x(b) \in M_0$ für alle $b \in \mathfrak{m}$, dann erhält man durch die Einschränkung auf $\mathfrak{m}$ einen K^o-linearen Morphismus $x : \mathfrak{m} \to M_0$. Weil x' K-linear ist, ist $x[\varpi^{-1}] = x'$. Nun identifizieren wir $\mathrm{Hom}_K(K, M_0[\varpi-1])$ mit $M_0[\varpi^{-1}]$ und erhalten aus der obigen Gleichung die zu beweisende Aussage.

(c) Wir haben auf Seite 57 gesehen, dass wir xM mit $(xM_*)^a$ identifizieren können. Insbesondere ist also nach (a) dann xM_* flach und damit auch xM. Es ergibt sich also mit (b)

$$\begin{aligned}(xM)_* &= \left\{ y \in xM_*[\varpi^{-1}] \;\middle|\; \forall b \in \mathfrak{m} : by \in xM_* \right\} = \\ &= x\left\{ y' \in M_*[\varpi^{-1}] \;\middle|\; \forall b \in \mathfrak{m} : by' \in M_* \right\} = xM_*.\end{aligned}$$

Die zweite Gleichung folgt dabei direkt aus der Tatsache, dass M_* keine x-Torsion hat. Weiterhin ist wegen $xM_*[\varpi^{-1}] = M_*[\varpi^{-1}]$ auch

$$xM_* = \left\{ y \in M_*[\varpi^{-1}] \;\middle|\; \forall b \in \mathfrak{m} : by \in xM_* \right\}.$$

Insbesondere ist ein Element $y \in M_*$ genau dann durch x teilbar, wenn für alle $b \in \mathfrak{m}$ das Element by durch x teilbar ist.
Bevor wir dem Beweis in [Sch12b] weiter folgen, einige Vorüberlegungen: Sei $b \in \mathfrak{m}$. Wir erhalten aus dem kommutativen Diagramm, mit exakten Reihen

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & xbM \arrow[r] \arrow[d] & M \arrow[r] \arrow[d] & M/xbM \arrow[r] & 0 \\ 0 \arrow[r] & xM \arrow[r] & M \arrow[r] & M/xM \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

eine Abbildung $M/xbM \to M/xM$ und außerdem wegen der Linksexaktheit von $(\cdot)_*$ (Satz 3.4.20) und (b) ein kommutatives Diagramm mit exakten Reihen:

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & xbM_* \arrow[r] \arrow[d] & M_* \arrow[r] \arrow[d] & (M/xbM)_* \arrow[d] \\ 0 \arrow[r] & xM_* \arrow[r] & M_* \arrow[r] & (M/xM)_* \end{tikzcd}$$

Insbesondere ergibt sich das folgende kommutative Diagramm, dessen unterer Pfeil injektiv ist und dessen linker Pfeil surjektiv ist.

$$\begin{tikzcd}
M_* \arrow[r, "\pi_3"] \arrow[d, "\pi_1"] \arrow[dr, "\pi_2"] & (M/xbM)_* \arrow[d, "f"] \\
M/xM_* \arrow[r, "i_1"] & (M/xM)_*
\end{tikzcd}$$

Es ist nun klar, dass das Bild von M/xM_* in $(M/xM)_*$ in dem Bild von $(M/xbM)_*$ enthalten ist. Da $M_* \to (M/xbM)_*$ nicht surjektiv ist, müssen wir für die umgekehrte Inklusion etwas mehr tun.

Da alle folgenden Morphismen in K^{oa}-**Mod** der Form $f^a : M \to N$ mit K^o-linearem $f : M_0 \to N_0$ sind, können wir ohne Einschränkung via $\mathfrak{m} \otimes_{K^o} M_0 \to M_0$ den Modul der Fastelemente M_* mit $\mathrm{Hom}_{K^o}(\mathfrak{m}, M_0)$ identifizieren und $(f^a)_*(y) = f \circ y : \mathfrak{m} \to N_0$ setzen. Bezeichnen wir für $b \in \mathfrak{m}$ mit e_b die Auswertungsabbildung von $(M/xbM)_* \to M_0/xbM_0; y \mapsto y(b)$, dann erhalten wir, wie man nachrechnet, das folgende kommutative Diagramm.

$$\begin{tikzcd}
M_* \arrow[rr, "\beta"] \arrow[d, "\pi_3"] & & M_* \arrow[d, "\pi_4"] \\
(M/xbM)_* \arrow[r, "e_b"] \arrow[rr, bend right, "e"'] & M_0/xbM_0 \arrow[r, "\nu"] & M_*/xbM_*
\end{tikzcd}$$

Dabei ist ν die von dem natürlichen Morphismus $M_0 \to M_*$ induzierte Abbildung und β die Multiplikation mit dem Element b. Da Multiplikation mit b außerdem einen injektiven Morphismus $M/xM \to M/xbM$ induziert, erhält man eine injektive K^o-lineare Abbildung $\beta' : (M/xM)_* \to (M/xbM)_*$. Insgesamt ergibt sich so das folgende kommutative Diagramm, in dem β, β' und β'' jeweils Multiplikation mit b bezeichnet und alle anderen Pfeile die kanonischen Morphismen sind.

$$\begin{tikzcd}
M_*/xM_* \arrow[d, "i_1"] & M_* \arrow[l, "\pi_1"'] \arrow[r, "\beta"] \arrow[d, "\pi_3"] \arrow[dl, "\pi_2"] & M_* \arrow[d, "\pi_4"] \arrow[ddl, "\pi_5"'] \\
(M/xM)_* \arrow[dr, "\beta'"] & (M/xbM)_* \arrow[l, "f"] \arrow[r, "e"] \arrow[d, "\beta''"] & M_*/xbM_* \arrow[dl, "i_2"] \\
& (M/xbM)_* &
\end{tikzcd}$$

Sei nun $n = e(m) \in M_*/xbM_*$ mit Lift n' in M_*. Wir behaupten, dass n' durch b teilbar ist, d.h., dass es ein m' mit $\beta(m') = bm' = n'$ gibt. Wir behaupten weiterhin, dass $i_1(\pi_1(m')) = f(m)$ gilt, womit der Teil (c) gezeigt wäre.

Wir haben weiter oben schon bemerkt, dass es für die erste Behauptung reicht, zu zeigen, dass cn' für alle $c \in \mathfrak{m}$ durch b teilbar ist. Es ist, da $\mathfrak{m}^2 = \mathfrak{m}$

$$\pi_4(cn') = cn = ce(m) = c\nu(m(b)) = b\nu(m(c)) \in b(M_*/xbM_*)$$

Ist $z \in M_*$ ein Lift von $\nu(m(c))$, dann gilt also $cn' - bz \in xbM_* \subset bM_*$, woraus folgt, dass auch $cn \in bM_*$. Damit ist die erste Behauptung gezeigt.
Für die zweite Behauptung reicht wegen der Injektivität von β' zu zeigen, dass

$$\beta'(i_1(\pi_1(m'))) = \beta'(f(m))$$

gilt. Dies ergibt sich durch eine Diagrammjagd:

$$\beta'(i_1(\pi_1(m'))) = \beta''(m') = i_2(\pi_4(\beta(m'))) = i_2(n) = \beta''(m) = \beta'(f(m))$$

(d) Nach Satz 3.4.20 vertauschen $(\cdot)^a$ und $(\cdot)_*$ mit inversen Limites.
Ist M_* zunächst ϖ-adisch vollständig, dann ergibt sich

$$M = (M_*)^a = (\varprojlim M_*/\varpi^n M_*)^a = \varprojlim (M_*/\varpi^n M_*)^a = \varprojlim M/\varpi^n M,$$

weshalb M dann ϖ-adisch vollständig ist. Die Umkehrung folgt aus der Gleichung

$$M_* = (\varprojlim M/\varpi^n M)_* = \varprojlim (M/\ \varpi^n M)_* = \varprojlim (M_*/\varpi^n M_*).$$

Dabei ergibt sich die letzte Gleichung wie folgt: Man erhält aus allgemeinen Überlegungen für alle n das folgende kommutative Diagramm:

$$\begin{array}{ccc} M_*/\varpi^{n+1}M_* & \xrightarrow{\alpha_{n+1}} & (M/\varpi^n M)_* \\ \downarrow{\scriptstyle f_n} & & \downarrow{\scriptstyle g_n} \\ M_*/\varpi^n M_* & \xrightarrow{\alpha_n} & (M/\varpi^n M)_* \end{array}$$

Aus (c) mit $\varpi^n = x$ und $b = \varpi$ folgt dann, dass die Abbildungen α_n injektiv sind und $\mathrm{im}(\alpha_n) = \mathrm{im}(g_n)$. Daraus folgt sofort, dass die kanonische Abbildung

$$\varprojlim (M_*/\varpi^n M_*) \to \varprojlim (M/\ \varpi^n M)_*$$

ein Isomorphismus ist. □

Bemerkung 4.3.3. Insbesondere zeigt der Beweis von (d), dass $M = M_0^a$ bereits ϖ-adisch vollständig ist, wenn M_0 schon ϖ-adisch vollständig ist.

Wir zeigen nun, dass es eine Äquivalenz K-**Perf** $\to K^{oa}$-**Perf** gibt und geben anschließend ihr Quasiinverses an.

Satz 4.3.4 ([Sch12b, Proposition 5.5]). *Der Lokalisierungs-Funktor K^o-**Alg** $\to K^{oa}$-**Alg** induziert via*

$$R \mapsto (R^o)^a$$

*einen Funktor K-**Perf** $\to K^{oa}$-**Perf**. Außerdem induziert die Frobeniusabbildung einen Isomorphismus $R^o/\varpi^{1/p} \cong R^o/\varpi$.*

Beweis. Wir haben schon gesehen, dass R^o flach und ϖ-adisch vollständig ist. Nach obigem Lemma 4.3.2 ist R^{oa} dann ebenfalls flach und ϖ-adisch vollständig. Außerdem induziert der Frobenius eine surjektive Abbildung $R^o/\varpi^{1/p} \to R^o/\varpi$. Sei $x^p \in \varpi R^o$, dann ist $\varpi^{-1}x^p$ potenzbeschränkt und nach Lemma 2.2.11 ist auch $\varpi^{-1/p}x$ potenzbeschränkt. Daraus folgt $x \in \varpi^{1/p}R^o$ und Injektivät der Abbildung. Damit gilt dann auch $R^{oa}/\varpi^{1/p} \cong R^{oa}/\varpi$.
Weiterhin gilt für einen stetigen K-Algebra Morphismus $f : R \to S$ bereits $f(R^o) \subset S^o$. Daher erhalten wir $f^a_{|R^o} : R^o \to S^o$ einen K^o-Algebra-Morphismus und damit auch $(f_{|R^o})^a : R^{oa} \to S^{oa}$. □

Aus dem folgenden Korollar ergibt sich, dass die Definition einer perfektoiden K-Algebra tatsächlich unabhängig von Wahl des Elements ϖ ist.

Korollar 4.3.5. *Sei K ein perfektoider Körper. Sei R eine vollständige, normierte K-Algebra. Seien weiterhin $\varpi, \varpi' \in K^\times$ mit $|p| \leq |\varpi|, |\varpi'| < 1$.*
Dann gilt: R^o/ϖ ist genau dann perfekt, wenn R^o/p perfekt ist.

Beweis. Sei ohne Einschränkung $|\varpi| \leq |\varpi'|$.

Ist R^o/ϖ perfekt, so ist auch R^o/ϖ' perfekt, denn der kanonische Ringhomomorphismus

$$R^o/\varpi \to R^o/\varpi'$$

ist wegen $\varpi \in (\varpi')$ surjektiv.
Umgekehrt können wir ohne Einschränkung annehmen, dass alle Wurzeln $\varpi^{p^n} \in K^o$ existieren. Insbesondere gibt es ein $n \in \mathbb{N}$ so, dass

$$|\varpi^{1/p^n}| \geq |\varpi'|.$$

Über den Isomorphismus $R^o/\varpi^{1/p} \cong R^o/\varpi$ folgt aus der Perfektheit von $R^o/\varpi^{1/p^n}$ induktiv, dass R^o/ϖ perfekt ist. □

Bemerkung 4.3.6. [Sch12b, Proposition 5.9] besagt, dass in Charakteristik p der Ring R^o/ϖ genau dann perfekt ist, wenn R^o perfekt ist. Diese Behauptung kann direkt bewiesen werden, indem man

$$x = (\sum_i^\infty \varpi^{1/p} y_i)^p$$

schreibt, wobei die y_i sich induktiv aus $x = y_0 + \varpi z_0$ ergeben.

Scholze zeigt nun die Existenz eines Funktors K^{oa}-**Perf** $\to K$-**Perf** und folgert direkt aus der Konstruktion ([Sch12b, Lemma 5.6]), dass dieser quasiinvers zu dem obigen Funktor K-**Perf** $\to K^{oa}$-**Perf** ist. Wir werden sowohl die Konstruktion des Funktors K^{oa}-**Perf** $\to K$-**Perf** als auch die Tatsache, dass er quasiinvers zu K-**Perf** $\to K^{oa}$-**Perf** im Folgenden ausführlich besprechen.

Satz 4.3.7 ([Sch12b, Lemma 5.6])**.** *Sei A eine perfektoide K^{oa}-Algebra und setze $R = A_*[\varpi^{-1}]$ mit einer K-Algebranorm, sodass A_* offen und beschränkt ist. Dann ist R eine perfektoide K-Algebra und A_* die Menge der potenzbeschränkten Elemente.*

Bemerkung 4.3.8. Scholze spricht von *der* K-Banachalgebra-Norm, sodass A_* offen und beschränkt ist. Es ist ohne weiteres nicht klar, woher die Eindeutigkeit kommt. Im Beweis wird aber gezeigt, dass wenn A_* offen und beschränkt ist, A_* gerade die Menge der potenzbeschränkten Elemente von $R = A_*[\varpi^{-1}]$ ist. Haben wir zwei solcher Normen, so sehen wir mit Satz 3.1.3, dass $1_R = 1_{A_*}[\varpi^{-1}]$ ein Homöomorphismus ist. Weiterhin ist R wegen Satz 2.2.22 genau dann vollständig bezüglich der einen Norm, wenn R bezüglich der anderen Norm vollständig ist.

Lemma 4.3.9. *Sei A eine perfektoide K^{oa}-Algebra und $R = A_*[\varpi^{-1}]$. Dann definiert*

$$|x|_R = \inf \left\{ |c|^{-1} \;\middle|\; c \in K^\times, cx \in A_* \right\}$$

eine K-Algebra-Norm auf R, sodass A_* offen und beschränkt ist. Weiterhin ist R bezüglich $|\cdot|_R$ vollständig.

Beweis. Es ist klar, dass $|0|_R = 0$ gilt. Ist umgekehrt $|x|_R = 0$, so gibt es eine Folge $c_i = b_i\varpi^{-n_i}$ mit $b_i^{-1} \in K^o$ und $(n_i)_i$ streng monoton steigend, sodass $c_i x \in A_*$. Insbesondere folgt, dass $x \in \varpi^{n_i} A_*$ für alle $i \in \mathbb{N}$. Da A_* nach Voraussetzung ϖ-adisch vollständig ist, ist $x = 0$.
Seien $x, y \in R$ und $c, d \in K^\times$ mit $cx, dy \in A_*$. Wir können ohne Einschränkung $|c| \leq |d|$ also $cd^{-1} \in K^o$ annehmen. Dann ist $c(x+y) = cx + cd{-}1dy \in A_*$. Daraus folgt, dass

$$|x+y|_R = \inf \left\{ |b|^{-1} \;\middle|\; b \in K^\times, b(x+y) \in A_* \right\} \leq$$

$$\inf \left\{ |c|^{-1} + |d|^{-1} \;\middle|\; c, d \in K^\times, cx, dy \in A_* \right\} = |x|_R + |y|_R$$

Ebenso zeigt man leicht $|xy|_R \leq |x|_R|y|_R$ und $|cx|_R \leq |c||x|_R$ für $c \in K$. Es ist nach Definition von $|\cdot|_R$ klar, dass $B(0;1) \subset A_* \subset \bar{B}(0;1)$ gilt.
Wir müssen noch zeigen, dass R bezüglich $|\cdot|_R$ vollständig ist. Sei dazu x_n eine Cauchy-Folge in R. Da Cauchy-Folgen beschränkt sind, können wir mit einem Element $b \in K^\times$ multiplizieren und annehmen, dass alle x_n bereits in $B(0;1) \subset A_*$ liegen. Weiterhin können wir, indem wir $(x_n)_n$ durch eine Teilfolge ersetzen, ohne Einschränkung annehmen, dass $|x_{n+1} - x_n|_R < |\varpi^n|_R$ gilt. Daraus folgt $\varpi^{-n}(x_{n+1} - x_n) \in B(0;1) \subset A_*$ und $(x_{n+1} - x_n) \in \varpi^n A_*$. Die Folge $(x_n)_n$ definiert also ein Element in $\varprojlim_n A_*/\varpi$. Sei x das Urbild dieses Elementes unter dem Isomorphismus $A_* \to \varprojlim_n A_*/\varpi^n$. Es ist dann klar, dass die Folge $(x_n)_n$ in R gegen x konvergiert. $\square$

Beweis von Satz 4.3.7. Wir wiederholen den Beweis, der in [Sch12b] gegeben ist. Für die K-Algebra-Norm auf R nehmen wir $|\cdot|_R$ aus obigem Lemma.
Die Frobenius-Abbildung induziert nach Definition einen Isomorphismus $A/\varpi^{1/p} \to A/\varpi$, also einen Fast-Isomorphismus $A_*/\varpi^{1/p} \to A_*/\varpi$. Wir behaupten, dass dies schon ein Isomorphismus ist, insbesondere ist dann die Frobeniusabbildung auf A_*/ϖ surjektiv. Für die Injektivität sei $x \in A_*$ mit $x^p \in \varpi A_*$. Da der Frobenius Fast-Isomorphismus ist, folgt $bx \in \varpi^{1/p}A_*$ für alle $b \in \mathfrak{m}$. Wie im Beweis zu Lemma 4.3.2 (c) gesehen, folgt daraus bereits $x \in \varpi^{1/p}A_*$.

Wir behaupten nun, dass für $x \in R$ aus $x^p \in A_*$ bereits $x \in A_*$ folgt ([Sch12b, Lemma 5.6]): Ist für $y \in A_*$ das Bild unter Frobenius $y^p \in \varpi A_*$, so folgt aus Injektivität, dass $y \in \varpi^{1/p}A_*$. Da A_* offen ist, folgt, dass es ein $k \geq 1$ mit $y = \varpi^{k/p}x \in A_*$ gibt. Zusammen mit $x^p \in A_*$ folgt $y^p \in \varpi A_*$ und daher $y \in \varpi^{1/p}A_*$. Da A_* nach Lemma 4.3.2 keine ϖ-Torsion hat, gilt $\varpi^{(k-1)/p}x \in A_*$, und induktiv dann auch $x \in A_*$.

Da A_* Ring und beschränkt ist, ist $A_* \subset R^o$. Ist umgekehrt $x \in R$ potenzbeschränkt, dann konvergiert $(bx)^n$ gegen 0 für alle $b \in \mathfrak{m}$. Da A_* offen ist, gibt es $m \geq 0$ mit $(bx)^{p^m} \in A_*$ und nach obiger Behauptung ergibt sich $bx \in A_*$. Da dies für alle $b \in \mathfrak{m}$ gilt folgt nach Lemma 4.3.2 (b), dass $x \in A_*$. Es gilt also $R^o = A_*$.

Wir müssen noch zeigen, dass die Abbildung $A_*/\varpi^{1/p} \to A_*/\varpi$ surjektiv ist. Dazu reicht es zu zeigen, dass die Verknüpfung $A_*/\varpi^{1/p} \to A_*/\varpi \to A_*/\mathfrak{m}$ surjektiv ist: Sei nämlich $f : M \to N$ ein Fastisomorphismus, die Verknüpfung $M \to N \to N/\mathfrak{m}N$ surjektiv und $y \in N$. Es gibt also ein $x \in M$ mit $f(x) - y \in \mathfrak{m}N$. Sei $b \in \mathfrak{m}$ und $z \in N$ mit $f(x) - y = bz$. Da der Cokern von f fast-null ist, gibt es ein $x' \in M$ mit $f(x') = bz$, also ist $f(x - x') = bz + y - bz = y$.
Ist also $x \in A_*$, dann gibt es $y, r \in A_*$ mit $y^p - \varpi^{1/p}x = \varpi r$, denn der Cokern des Frobenius ist fast-null. Insbesondere ist für $z = \varpi^{-1/p^2}y$ dann $\varpi^{1/p}z^p - \varpi^{1/p}x = \varpi r$ und daher $z^p - x \in \varpi^{1-1/p}A_* \subset A_*$. Wie wir gesehen haben, folgt aus $z^p \in A_*$ auch $z \in A_*$ und es ist $z^p \equiv x \mod \mathfrak{m}A_*$, was zu zeigen war. □

Korollar 4.3.10. *Die Zuordnung $A \mapsto A_*[\varpi^{-1}]; f \mapsto (f_*)[\varpi^{-1}]$ definiert einen Funktor $G : K^{oa}$-**Perf** $\to K$-**Perf**.*

Beweis. Für K^{oa}-Algebren A und B ist

$$(f_*)[\varpi^{-1}] : R = A_*[\varpi^{-1}] \to S = B_*[\varpi^{-1}]; a\varpi^{-n} \mapsto f_*(a)\varpi^{-n}$$

wohldefiniert, da A_* und B_* keine ϖ-Torsion haben. Weiterhin sehen wir wegen $R^o = A_*$ und $S^o = B_*$ dass $f_*[\varpi^{-1}](R^o) \subset S^o$. Nach Satz 2.2.18 ist $f_*[\varpi^{-1}] : R \to S$ daher stetig. Die Funktorialität folgt aus der Funktorialität von $(\cdot)_*$. □

Der folgende Satz ist das Hauptergebnis dieses Abschnitts. Bei Scholze ist es dem Leser überlassen, die Argumente zusammenzutragen.

Satz 4.3.11 ([Sch12b, S. 275]). *Der Funktor $G : K^{oa}$-**Perf** $\to K$-**Perf** aus Korollar 4.3.10 ist quasiinvers zu dem kanonischen Funktor $F : K$-**Perf** $\to K^{oa}$-**Perf**. F ist also eine Äquivalenz K-**Perf** $\cong K^{oa}$-**Perf** von Kategorien.*

Beweis. Sei R eine perfektoide K-Algebra, dann ist $GF(R) = (R^{oa})_*[\varpi^{-1}]$. Nach Satz 3.4.13 gibt es einen natürlichen Fast-Isomorphismus $R^o \to (R^{oa})_*$. Nach Satz 3.1.3 gibt es dann auch einen natürlichen Homöomorphismus

$$R = R^o[\varpi^{-1}] \to (R^{oa})_*[\varpi^{-1}] = GF(R).$$

Sei umgekehrt A eine perfektoide K^{oa}-Algebra, dann ist $FG(A) = (A_*[\varpi^{-1}])^{oa} = A_*^a$. Nach Korollar 3.4.18 gibt es einen natürlichen Isomorphismus von K^{oa}-Algebren

$$A \to A_*^a = FG(A)$$ □

Wir definieren nun noch die Kategorie $K^{oa}\ /\varpi$-**Perf**.

Definition 4.3.12 ([Sch12b, Definition 5.1 (iii)]). Eine perfektoide K^{oa}/ϖ-Algebra ist eine flache K^{oa}/ϖ-Algebra $\bar{A}$, sodass die Frobeniusabbildung einen Isomorphismus

$$\Phi : \bar{A}/\varpi^{1/p} \to \bar{A}/\varpi$$

induziert. Morphismen zwischen perfektoiden K^{oa}/ϖ-Algebren sind die Morphismen zwischen K^{oa}/ϖ-Algebren. Wir bezeichnen die Kategorie der perfektoiden K^{oa}/ϖ-Algebren mit $K^{oa}\ /\varpi$-**Perf**.

Für die Definition von K^{oa}/ϖ-**Alg** siehe Anhang, Seite 89. Der Ringisomorphismus $K^o/\varpi \to K^{\flat o}/\varpi^\flat$ aus Satz 4.2.11 induziert dann die Identifizierung K^{oa}/ϖ-**Perf** $=$ $K^{\flat oa}/\varpi^\flat$-**Perf**.
Über den Funktor

$$K^{oa}\text{-}\mathbf{Perf} \to K^{oa}/\varpi\text{-}\mathbf{Perf} \quad ; \quad A \mapsto A/\varpi,$$

der nach [Sch12b, Theorem 5.10] eine Äquivalenz, ist erhalten wir, von beiden Seiten kommend, eine Kette von Äquivalenzen

$$K\text{-}\mathbf{Perf} \to K^{oa}\text{-}\mathbf{Perf} \to K^{oa}/\varpi\text{-}\mathbf{Perf} = K^{\flat oa}/\varpi^\flat\text{-}\mathbf{Perf} \leftarrow K^{\flat oa}\text{-}\mathbf{Perf} \leftarrow K\flat\text{-}\mathbf{Perf}.$$

Der resultierende Funktor *Tilt* von K-**Perf** nach $K^\flat$-**Perf** wird in [Sch12b, Proposition 5.17] beschrieben, und man sieht darüber, dass der Funktor unabhängig von Wahl von ϖ ist: Es gilt nämlich

$$R^\flat \cong \lim_{x \mapsto x^p} R.$$

Ohne auf die explizite Beschreibung des Tilt-Funktors einzugehen, können wir überprüfen, ob eine gegebene $K^\flat$-Algebra S der Tilt einer K-perfektoiden K-Algebra R ist. Das folgende Lemma ist eine Aussage aus dem Beweis zu [Sch12b, Proposition 5.20].

Lemma 4.3.13. *Sei R eine perfektoide K-Algebra und S eine $K^\flat$-Algebra. Dann ist S der Tilt von R, wenn $R^o/\varpi \cong S^o/\varpi^\flat$ gilt.*

Beweis. Wir erinnern daran, dass der Funktor Tilt nur bis auf Isomorphie bestimmt ist. Bezeichnen wir den Funktor K-**Perf** $\to K^{oa}/\varpi$-**Perf** mit F, den Funktor $K^\flat$-**Perf** $\to K^{\flat oa}/\varpi^\flat$-**Perf** mit $F^\flat$ und die Identifizierung K^{oa}/ϖ-**Perf** $\to K^{\flat oa}/\varpi^\flat$ mit I, und mit G, $G^\flat$ und J jeweils Quasiinverse, so können wir für $B \cong G(C)$ ohne Einschränkung annehmen, dass $G^\flat(B) = C$. Es folgt aus der Voraussetzung, dass $I((R^o/\varpi)^a) \cong S^{oa}/\varpi^\flat = G(S)$. Daher ist $R^\flat = G^\flat IF(R) = G^\flat(I((R^o/\varpi)^a)) = S$. □

5 Überkonvergente Potenzreihen

In diesem letzten Kapitel konstruieren wir den Ring der überkonvergenten Potenzreihen mit p^m-ten Wurzeln. Der Ring der *strikt konvergenten Potenzreihen* über Körpern wird in [BGR84, Chapter 5] ausführlich untersucht. Es sind die Potenzreihen, die auf der Einheitskreisscheibe in K^n konvergieren. In [BGR84, 6.1.5] werden konvergente Potenzreihen auf allgemeinen Polyscheiben kurz beschrieben. Grosse-Klönne [GK00] schließlich definiert *Washnitzer*-Algebren als Vereinigung von konvergenten Potenzreihen mit Konvergenzradius $1 + \varepsilon$. Diese Potenzreihen werden allgemein auch als *überkonvergente Potenzreihen* bezeichnet. Auf der anderen Seite gibt es auf der Einheitskreisscheibe konvergente Potenzreihen mit p^m-ten Wurzeln, wie in [Sch12b, Proposition 5.20] vorgestellt. Wir werden in Abschnitt 5.1 auf Polyscheiben konvergente Potenzreihen mit p^m-ten Wurzeln konstruieren und dann analog zu der klassischen Washnitzer-Algebra zu einem Ring W überkonvergenter Potenzreihen mit p^m-ten Wurzeln zusammensetzen.
In Abschnitt 5.2 untersuchen wir, inwiefern W perfektoide Eigenschaften hat und inwieweit sich W tilten lässt. Dabei stößt man auf das Problem, dass W ebenso wie die klassische Washnitzer-Algebra nicht vollständig ist.

5.1 Konstruktion

Sei A zunächst ein beliebiger Ring und $n \in \mathbb{N}$ fest gewählt.

Wir betrachten für alle $m \in N$ den Polynomring $A[X_{1m}, \ldots, X_{nm}]$ und für $m \leq m'$ den A-Algebra-Morphismus

$$\iota_{m,m'} : A[X_{1m}, \ldots, X_{nm}] \to A[X_{1m'}, \ldots, X_{nm'}] \quad ; \quad X_{im} \mapsto X_{im'}^{p^{m'-m}}$$

Man überprüft leicht, dass für $m \leq m' \leq m''$ die Gleichheit $\iota_{m'',m'} \circ \iota_{m',m} = \iota_{m'',m}$ gilt. Wir betrachten den direkten Limes dieses gerichteten Systems, der ebenfalls eine A-Algebra ist und setzen

$$A[X^{1/p^\infty}] = A[X_1^{1/p^\infty}, \ldots, X_n^{1/p^\infty}] = \varinjlim_{m \in \mathbb{N}} A[X_{1m}, \ldots, X_{nm}].$$

Da die $\iota_{m,m'}$ injektiv sind, können wir den direkten Limes als Vereinigung

$$A[X^{1/p^\infty}] = \bigcup_m A[X_{1m}, \ldots, X_{nm}]$$

darstellen, indem wir jeweils $A[X_{1m}, \ldots, X_{nm}]$ mit seinem Bild in $A[X_{1m'}, \ldots, X_{nm'}]$ identifizieren. Wir nennen $A[X^{1/p^\infty}]$ den *Polynomring über A in n Indeterminanten* *mit p^m-ten Wurzeln.* Weiterhin schreiben für ein Element $f \in A[X^{1/p^\infty}]$ mit Urbild $\sum_{\nu \in \mathbb{N}^n} c_\nu X_{1m}^{\nu_1} \ldots X_{nm}^{\nu_n} \in A[X_{1m}, \ldots, X_{nm}]$, wobei fast alle $c_\nu = 0$

$$f = \sum_{\nu \in \mathbb{N}^n} c_\nu X^{\nu/p^m} = \sum_{\nu \in \mathbb{N}^n} c_\nu X_1^{\nu_1/p^m} \ldots X_n^{\nu_n/p^m}.$$

Aus der Konstruktion ist klar, dass ein Ringhomomorphismus $f : A \to B$ einen Ringhomomorphismus

$$f : A[X^{1/p^\infty}] \to B[X^{1/p^\infty}]$$

induziert.

Sei nun $(A, |\cdot|)$ ein normierter Ring und $\rho = (\rho_1, \ldots, \rho_n) \in \mathbb{R}^n_{\geq 1}$. Für ein Element $f = \sum_{\nu \in \mathbb{N}^n} c_\nu X^{\nu/p^m} \in A[X^{1/p^\infty}]$ setze

$$|f|_\rho = \max_{\nu \in \mathbb{N}^n}(|c_\nu| \rho^{\nu/p^m}),$$

wobei $\rho^{\nu/p^m} = \rho_1^{\nu_1/p^m} \cdot \ldots \cdot \rho_n^{\nu_n/p^m}$ ist. Ebenso schreiben wir für $j \in \mathbb{N}$ und $\nu = (\nu_1, \ldots, \nu_n) \in \mathbb{N}^n$ dann $j\nu = (j\nu_1, \ldots j\nu_n)$.
Wir nennen $|\cdot|_\rho$ die *ρ-Supremumsnorm* von $A[X^{1/p^\infty}]$ (vergleiche Beispiel 2.1.14).

Bemerkung 5.1.1. Die Wohldefiniertheit dieser Abbildung ergibt sich aus der folgenden Beobachtung: Sei ohne Einschränkung $m' \geq m$, dann gilt

$$\sum_\nu c_\nu X^{\nu/p^m} = \sum_\mu d_\mu X^{\mu/p^{m'}}$$

genau dann, wenn

$$d_\mu = \begin{cases} c_\nu, & \text{wenn es ein } \nu \in \mathbb{N}^n \text{ mit } : p^{m'-m}\nu = \mu \text{ gibt} \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

Es ist dann also

$$\begin{aligned} \left| \sum_\nu c_\nu X^\nu / p^m \right| = \max\{|c_\nu|\, \rho^{\nu/p^m}\} &= \max\{|c_\nu| \rho^{(p^{m'-m}\nu)/p^{m'}}\} = \\ = \max\,\{|d_\mu| \rho^{\mu/p^{m'}}\} &= |\sum_\mu d_\mu X^{\mu/p^{m'}}| \end{aligned}$$

Für $\rho = (1, \ldots, 1)$ ist für $A[X]$ bekannt, dass dies eine Norm bzw. Bewertung definiert, wenn $|\cdot|$ eine Norm bzw. eine Bewertung auf A ist. Man kann diese Aussage leicht verallgemeinern.

Satz 5.1.2. *Sei $(A, |\cdot|)$ ein normierter Ring und $A[X^{1/p^\infty}]$ der Polynomring in n Unbekannten mit p-ten Wurzeln. Sei weiterhin $\rho = (1, \dots, 1)$. Dann ist die Abbildung*

$$|\cdot|_1 : A[X^{1/p^\infty}] \to \mathbb{R}_{\geq 0} \quad ; \quad \sum_{\nu \in \mathbb{N}^n} c_\nu X^{\nu/p^m} \mapsto \max_{\nu \in \mathbb{N}^n}(|c_\nu|)$$

eine A-Algebra-Norm.
Ist die Norm auf A eine Bewertung, dann ist die Abbildung $|\cdot|_1$ ebenfalls eine Bewertung.

Beweis. Wir wiederholen im Wesentlichen den klassischen Beweis, wie er in [Bos08] geführt wird. Der Beweis wird in etwas anderer Form auch in [BGR84, 1.5.3] gegeben.
Seien $f = \sum_\nu c_\nu X^{\nu/p^m} \in A[X^{1/p^\infty}]$ und $g = \sum_\mu d_\mu X^{\mu/p^{m'}}$. Wegen der obigen Bemerkung können wir für den Beweis $m = m'$ annehmen. Wir zeigen, dass die Axiome für eine A-Algebra-Norm (siehe Abschnitt 2.1) gelten. Es ist klar, dass $|f|_1 = 0$ genau dann gilt, wenn $f = 0$ ist. Weiterhin ergibt sich

$$\begin{aligned} |f-g|_1 = \max_{\nu \in \mathbb{N}}\{|c_\nu - d_\nu|\} \leq \max_{\nu \in \mathbb{N}}\{\max(|c_\nu|, |d_\nu|)\} &= \max(\max_\nu\{|c_\nu|\}, \max_\nu\{|d_\nu|\}) = \\ &= \max(|f|_1, |g|_1). \end{aligned}$$

Mit der verschärften Dreiecksungleichung sieht man, dass

$$\begin{aligned} |fg|_1 = |\sum_\nu (\sum_{\mu+\mu'=\nu} c_\mu d_{\mu'}) X^{\nu/p^m}| &= \max_\nu\{|\sum_{\mu+\mu'=\nu} c_\mu d_{\mu'}|\} \leq \max_{\mu,\mu'}\{|c_\mu||d_{\mu'}|\} \leq \\ &\leq \max_\mu\{|c_\mu|\} \cdot \max_{\mu'}\{|d_{\mu'}|\} = |f|_1 |g|_1. \end{aligned}$$

Für $c \in A$ ist $|cf|_1 = \max\{|cc_\nu|\} \leq \max\{|c||c_\nu|\} = |c||f|_1$.
Sei $|\cdot|$ nun eine Bewertung auf A. Insbesondere ist A ein Integritätsbereich und wir können die Bewertung eindeutig auf seinen Quotientenkörper $K = Q(A)$ fortsetzen. Diese Fortsetzung induziert eine Fortsetzung von $|\cdot|_1$ auf $K[X^{1/p^\infty}]$. Seien nun $f, g \in K[X^{1/p^\infty}]$. Wir müssen zeigen, dass $|fg|_1 \geq |f|_1|g|_1$ gilt. Da offensichtlich für $c \in A$ bereits $|cf|_1 = |c||f|_1$ gilt und $|f| \in |K|$ können wir ohne Einschränkung $|f| = |g| = 1$ annehmen. Das heißt insbesondere $f, g \in K^o[X^{1/p^\infty}]$. Sei $\mathfrak{m} \subset K^o$ das maximale Ideal, dann induziert die Projektion $K^o \to K^o/\mathfrak{m}$ einen Ringhomomorphismus

$$K^o[X^{1/p^\infty}] \to (K^o/\mathfrak{m})[X^{1/p^\infty}] \quad f \mapsto \bar{f} = \sum_\nu \bar{c}_\nu X^{\nu/p^m}.$$

Nach Definition von $|\cdot|_1$ gilt für $f \in K^o[X^{1/p^\infty}]$ also$|f|_1 = 1$ genau dann, wenn $\bar{f} \neq 0$. Aus $|f|_1 = |g|_1 = 1$ folgt damit $\bar{f}, \bar{g} \neq 0$ und damit auch $\overline{fg} = \bar{f}\bar{g} \neq 0$. Das bedeutet aber gerade $|fg|_1 = 1$. □

Bemerkung 5.1.3. Für beliebiges $\rho \neq (1, \dots, 1)$ kann man den obigen Satz analog zu dem klassischen Beweis des Gauß-Lemmas zeigen, siehe Anhang, Seite 94.

Bemerkung 5.1.4. Die Definition der ρ-Supremumsnorm ist von der Tatsache motiviert, dass im klassischen Fall der strikt konvergenten Potenzreihen

$$|f|_1 = \sup_{x \in \overline{B}(0;1) \subset K^n} \{|f(x)|\}$$

gilt, wenn K algebraisch abgeschlossen ist ([Bos08]). In [BGR84, 6.1.5] wird ohne Beweis bemerkt, dass für beliebiges ρ und K algebraisch abgeschlossen ebenfalls

$$|f|_\rho = \sup_{x \in P(0;\rho) \subset K^n} \{|f(x)|\}$$

gilt, wobei $P(0;\rho)$ die Polyscheibe mit Radius ρ ist. Wir geben im Anhang, Seite 94 einen Beweis für nicht-diskret bewertete Körper (nicht notwendigerweise algebraisch abgeschlossen).

Wir werden uns im Folgenden auf den Fall beschränken, dass $A = K$ ein perfektoider Körper ist und $\rho \in |K|^n \cap \mathbb{R}^n_{\geq 1}$ ist.
Wir haben in Lemma 4.2.8 gesehen, dass es für jedes $x \in K$ ein Element $x^\flat \in K^\flat$ mit $|(x^\flat)^\sharp| = |x|$ gibt. Da $K^\flat$ perfekt ist, und die Abbildung $(\cdot)^\sharp : K^\flat \to K$ multiplikativ ist, finden wir für jedes $|x| = \rho \in |K|$ ein kompatibles System $((x^{1/p^m})^\flat)^\sharp \in K$ von Wurzeln mit $|((x^{1/p^m})^\flat)^\sharp| = \rho^{1/p^m}$. Für jedes $\rho \in |K|^n \cap \mathbb{R}^n_{\geq 1}$ sei nun ein solches System r_i^{1/p^m} mit $|r_i| = \rho_i$ gewählt. Wir schreiben im Folgenden $r = r_1 \cdots r_n$ und $r^{\nu/p^m} = r_1^{\nu_1/p^m} \cdots r_n^{\nu_1/p^m}$ für $\nu \in \mathbb{N}^n$.

Seien ρ, r wie oben gegeben, dann definieren wir einen K-Algebra-Morphismus

$$\tau_\rho : K[X^{1/p^\infty}] \to K[Y^{1/p^\infty}]$$

via $X^{1/p^m} \mapsto r^{1/p^m} Y^{1/p^m}$. Dieser ist wegen

$$X^{1/p^m} = X^{p^{m'-m}/p^{m'}} \mapsto (r^{1/p^{m'}} Y^{1/p^{m'}})^{p^{m'-m}} = r^{p^{m'-m}/p^{m'}} Y^{p^{m'-m}/p^{m'}} = r^{1/p^m} Y^{1/p^m}$$

offenbar wohldefiniert. Da für alle i bereits $r_i \in K^\times$ ist τ_ρ ein Isomorphismus.

Lemma 5.1.5. *Sei K ein perfektoider Körper, ρ, r und τ_ρ wie oben. Seien $|\cdot|_\rho$ bzw. $|\cdot|_1$ die Supremumsnormen auf $K[X^{1/p^\infty}]$ bzw. $K[Y^{1/p^\infty}]$. Dann gilt für $f \in K[X^{1/p^\infty}]$*

$$|f|_\rho = |\tau_\rho(f)|_1.$$

Insbesondere ist $|\cdot|_\rho$ eine Bewertung auf $K[X^{1/p^\infty}]$.

Beweis. Sei $f = \sum_\nu c_\nu X^{\nu/p^m}$, dann ist

$$|f|_\rho = \max\{|c_\nu|\rho^{\nu/p^m}\} = \max\{|c_\nu r^{\nu/p^m}|\} = |\sum_\nu c_\nu r^{\nu/p^m} Y^{\nu/p^m}|_1 = |\tau(f)|_1.$$

Dass $|\cdot|_\rho$ eine Bewertung ist folgt sofort, zum Beispiel ist

$$|f-g|_\rho = |\tau_\rho(f-g)|_1 = |\tau_\rho(f)-\tau_\rho(g)|_1 \leq \max(|\tau_\rho(f)|_1, |\tau_\rho(g)|_1) = \max(|f|_\rho, |g|_\rho).$$

Die anderen Axiome folgen analog. $\square$

Wir wollen nun konvergente Potenzreihen betrachten. Im klassischen Fall setzt man

$$K\langle X\rangle = \left\{ \sum_\nu c_\nu X^\nu \in K[[X]] \;\middle|\; |c_\nu|\rho^\nu \xrightarrow{|\nu|\to\infty} 0 \right\}$$

als Ring der Potenzreihen, die auf der Polyscheibe mit Radius ρ konvergieren. Man zeigt dann, dass dies gerade die Vervollständigung von $K[X]$ bezüglich $|\cdot|_\rho$ ist (vergleiche [BGR84, 6.1.5]. Eine analoge Konstruktion mit p^m-ten Wurzeln ergibt aber keine vollständige K-Algebra:

Analog zu $K[X^{1/p^\infty}]$ konstruieren wir $K[[X^{1/p^\infty}]]$ und für gegebenes $\rho \in \mathbb{R}^n_{\geq 0}$ betrachten wir die K-Algebra

$$B = \left\{ \sum_{\nu\in\mathbb{N}^n} c_\nu X^{\nu/p^m} \in A[[X^{1/p^\infty}]] \;\middle|\; |c_\nu|\rho^{\nu/p^m} \xrightarrow{|\nu|\to\infty} 0 \right\}.$$

Analog zu dem Fall ohne p-te Wurzeln, betrachten wir auf B die Bewertung

$$|\sum_{\nu\in\mathbb{N}^n} c_\nu X^{\nu/p^m}|_\rho = \max_\nu |c_\nu|\rho^{\nu/p^m}.$$

Behauptung: $(B, |\cdot|_\rho)$ ist im Allgemeinen nicht vollständig.

Beweis. Sei zum Beispiel $n=1$ und $\rho \geq 1$ und

$$f_i = \sum_{\nu=0}^{i} a_\nu X^{1/p^\nu} \quad (a_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}} \text{ Nullfolge in } K, |a_\nu| \neq 0 \text{ für alle } \nu \in \mathbb{N}.$$

Es folgt, dass $|f_{i+1}-f_i| = |a_{i+1}X^{1/p^{i+1}}| \leq |a_{i+1}|\rho \xrightarrow{i\to\infty} 0$. Also ist $(f_i)_{i\in\mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge. Wir nehmen an, sie habe einen Grenzwert

$$f = \sum_{\nu=0}^{\infty} c_\nu X^{\nu/p^m} \in B.$$

Für $i > m$ gibt es $c'_\nu \in K$ mit $f - f_i = \sum_\nu c'_\nu X^{\nu/p^m} - a_{m+1}X^{1/p^{m+1}} - \cdots - a_i X^{1/p^i}$. Daraus folgt für alle $i > m$, dass

$$|f-f_i| = \max_{\nu\in\mathbb{N}}(|c'_\nu|\rho^{\nu/p^m}, |a_{m+1}|\rho^{1/p^{m+1}}, \ldots, |a_i|\rho^{1/p^i}) \geq |a_{m+1}|.$$

Da nach Konstruktion $|a_{m+1}| \neq 0$ ist $|f-f_i|$ nach unten beschränkt. Dies ist ein Widerspruch zur Annahme, dass f ein Grenzwert von $(f_i)_{i\in\mathbb{N}}$ ist. $\square$

Definition 5.1.6. Sei K ein perfektoider Körper, $\rho \in |K|^n \cap \mathbb{R}^n_{\geq 1}$, dann definieren wir

$$K\langle X^{1/p^\infty}\rangle_\rho$$

als Vervollständigung von $K[X^{1/p^\infty}]$ bezüglich der ρ-Supremumsnorm $|\cdot|_\rho$. Wir nennen $K\langle X^{1/p^\infty}\rangle_\rho$ den *Ring der auf der Polyscheibe mit Radius ρ konvergenten Potenzreihen mit p^m-ten Wurzeln.*

Mit der Notation von oben ist klar, dass $B \subset K\langle X^{1/p^\infty}\rangle_\rho$.

Nun können wir den *Ring der überkonvergenten Potenzreihen* analog zu [GK00] konstruieren. Im klassischen Fall ist dies die Vereinigung der konvergenten Potenzreihen auf Kreisscheiben mit Radius $\rho > 1$. Da K nicht diskret bewertet ist und es daher in $|K^\times| \cap \mathbb{R}_{>1}$ eine Folge gibt, die gegen 1 konvergiert, verlieren wir keine Information wenn wir nur $\rho = (\rho_1, \cdots \rho_n)$ mit $\rho_i \in |K^\times| \cap \mathbb{R}_{>1}$ und $\rho_1 = \cdots = \rho_n$ betrachten. Weiterhin seien im Folgenden für jedes solches ρ wie oben kompatible Systeme von p^m-ten Wurzeln r_i^{1/p^m} mit $|r_i| = \rho_i$ gewählt. Wir schreiben $\rho \geq \rho'$, wenn $\rho_i \geq \rho'_i$ für alle i gilt.

Sei $f \in K[X^{1/p^\infty}]$, und $\rho \geq \rho'$, dann ist $|f|_{\rho'} \leq |f|_\rho$ und die Identität eine stetige Abbildung

$$(K[X^{1/p^\infty}], |\cdot|_\rho) \to (K[X^{1/p^\infty}], |\cdot|_{\rho'}).$$

Insbesondere induziert dies stetige Abbildungen

$$\sigma_{\rho,\rho'} : K\langle X^{1/p^\infty}\rangle_\rho \to K\langle X^{1/p^\infty}\rangle_{\rho'}.$$

Sind im Allgemeinen zwei metrische Räume M_1 und M_2 gegeben und $M_1 \to M_2$ eine stetige, injektive Abbildung, dann ist nicht klar, dass die induzierte Abbildung $\widehat{M_1} \to \widehat{M_2}$ injektiv ist. Vergleiche Anhang, Seite 95. In unserem Fall gilt aber:

Lemma 5.1.7. *Für $\rho \geq \rho'$ ist die Abbildung $\sigma_{\rho,\rho'} : K\langle X^{1/p^\infty}\rangle_\rho \to K\langle X^{1/p^\infty}\rangle_{\rho'}$ injektiv.*

Beweis. Es reicht zu zeigen, dass $\sigma_{\rho,1} : K\langle X^{1/p^\infty}\rangle_\rho \to K\langle X^{1/p^\infty}\rangle_1$ für alle $\rho \geq 1$ injektiv ist, denn es gilt $\iota_{\rho',1} = \iota_{\rho,1} \circ \iota_{\rho',\rho}$.
Sei dazu $(f_i)_{i\in\mathbb{N}}$ Cauchy-Folge bezüglich $|\cdot|_\rho$ und Nullfolge bezüglich $|\cdot|_1$. Für die Injektivität von $\iota_{\rho,1}$ reicht es nun zu zeigen, dass $(f_i)_i$ Nullfolge bezüglich $|\cdot|_\rho$ ist. Angenommen, $(f_i)_i$ ist keine Nullfolge: Weil $(f_i)_i$ Cauchy-Folge bezüglich $|\cdot|_\rho$ ist, gibt es dann ein $\varepsilon > 0$ und ein $i_0 \in \mathbb{N}$ so, dass $|f_i|_\rho \geq \varepsilon$ und $|f_i - f_{i_0}|_\rho < \varepsilon$ für alle $i \geq i_0$ gilt. Sei

$$f_{i_0} = \sum_\nu c_{i_0,\nu} X^{\nu/p^{m(i_0)}},$$

dann gibt es ein $\nu_0 \in \mathbb{N}^n$ mit $|c_{i_0,\nu_0}|\rho^{\nu_0/p^{m(i_0)}} \geq \varepsilon$. Da aber $|f_i|_1$ Nullfolge ist, gibt es ein $i \geq i_0$ so, dass für alle Koeffizienten $c_{i,\nu}$ von f_i bereits $|c_{i,\nu}| < |c_{i_0,\nu_0}|$ gilt. Schreiben wir $f_i = \sum_\nu c_{i,\nu} X^{\nu/p^{m(i)}}$ mit $m(i) \geq m(i_0)$. Dann ergibt sich für $\nu = \nu_0 p^{m(i)-m(i_0)}$

$$|f_i - f_{i_0}|_\rho \geq |c_{i,\nu} - c_{i_0,\nu_0}|\rho^{\nu_0/p^{m(i_0)}} = \max(|c_{i,\nu}|, |c_{i_0,\nu_0}|)\rho^{\nu_0/p^{m(i_0)}} = |c_{i_0,\nu_0}|\rho^{\nu_0/p^{m(i_0)}} \geq \varepsilon.$$

Dies ist ein Widerspruch zu $|f_i - f_{i_0}|_\rho < \varepsilon$, woraus folgt, dass $(f_i)_i$ auch bezüglich $|\cdot|_\rho$ eine Nullfolge ist. $\square$

Definition 5.1.8. Sei K ein perfektoider Körper, dann definieren wir

$$W = \varinjlim_{\rho \in |K| \cap \mathbb{R}_{>1}} K\langle X^{1/p^\infty}\rangle_\rho$$

wobei der Limes über die Abbildungen $\sigma_{\rho,\rho'} : K\langle X^{1/p^\infty}\rangle_\rho \to K\langle X^{1/p^\infty}\rangle_{\rho'}$ läuft. Mit obigem Lemma können wir

$$W = \bigcup_{\rho \in |K| \cap \mathbb{R}_{>1}} K\langle X^{1/p^\infty}\rangle_\rho$$

via dieser Abbildungen identifizieren und nennen dies *den Ring der überkonvergenten Potenzreihen mit* p^m*-ten Wurzeln.*

Wie im klassischen Fall können wir über die Einbettung $W \to \varinjlim_{\rho \in |K| \cap \mathbb{R}_{>1}} K\langle X^{1/p^\infty}\rangle_1$ die K-Algebra W via $|f| = |f|_1$ zu einer bewerteten K-Algebra machen. Im klassischen Fall ist der Ring der überkonvergenten Potenzreihen damit nicht vollständig. Wir erwarten in unserem Fall nichts anderes; der Beweis ist aber etwas technischer.

Satz 5.1.9. *Die K-Algebra $(W, |\cdot|_1)$ ist nicht vollständig.*

Beweis. Sei ohne Einschränkung $n = 1$; sei $g_i = \sum_{j=0}^{i} p^j X^{p^j}$. Es ist klar, dass wegen $|p| < 1$ die Folge $(g_i)_i$ Cauchy-Folge bezüglich $|\cdot|_1$ ist. Es reicht nun zu zeigen, dass es für kein $\rho > 1$ eine Cauchy-Folge $(f_i)_i$ in $K[X^{1/p^\infty}]$bezüglich $|\cdot|_\rho$ gibt, sodass $(f_i)_i$ in $K\langle X^{1/p^\infty}\rangle_1$ gegen $\lim_{i\to\infty} g_i$ konvergiert.

Angenommen es gibt für ein $\rho > 1$ eine Folge $(f_i)_i$ in $K[X^{1/p^\infty}]$ so, dass $(f_i)_i$ bezüglich $|\cdot|_\rho$ Cauchy-Folge und $(|g_i - f_i|_1)_i$ Nullfolge ist. Da (f_i) bzgl. $|\cdot|_\rho$ Cauchy-Folge ist, gibt es ein $\varepsilon > 0$ so, dass $|f_i|_\rho \leq \varepsilon$ für alle $i \in \mathbb{N}$. Bezeichne für f_i den Koeffizienten von X^{p^j} mit c_{i,p^j}. Da $|f_i - g_i|_1$ wegen $\lim_{i\to\infty} f_i = \lim_{i\to\infty} g_i$ bezüglich $|\cdot|_1$ gegen 0 konvergiert, folgt, dass $(|c_{i,p^j} - p^j|_1)_{i\in\mathbb{N}}$ für alle $j \in \mathbb{N}$ gegen 0 konvergiert. Da $(f_i)_i$ bezüglich $|\cdot|_\rho$ Cauchy-Folge ist, gibt es ein i_0 so, dass für alle $i \geq i_0$ bereits $|f_i - f_{i_0}| < \varepsilon$ gilt. Da $(|p^j|\rho^{p^j})_j$ eine nach oben unbeschränkte Folge ist, können wir ohne Einschränkung $|p^{i_0}|\rho^{p^{i_0}} > 2\varepsilon$ annehmen. Weiterhin gibt es nach Obigem ein i mit $|c_{i,p^{i_0}} - p^{i_0}| < \varepsilon\rho^{-p^{i_0}}$. Es folgt $|c_i p^{i_0}| > |p^{i_0}| - \varepsilon\rho^{-p^{i_0}}$, also $|c_{i'} p^{i_0}|\rho^{p^{i_0}} > \varepsilon$, was aber wegen $|f_i|_\rho \geq |c_{i'} p^{i_0}|\rho^{p^{i_0}} > \varepsilon$ ein Widerspruch zu $|f_i|_\rho \leq \varepsilon$ ist. $\square$

5.2 Der Tilt der überkonvergenten Potenzreihen

Wie wir gesehen haben, ist $(W, |\cdot|_1)$ nicht vollständig und kann daher keine perfektoide K-Algebra sein. Da wir für das Tilten Vollständigkeit benötigen, müssen wir uns damit begnügen, die einzelnen K-Algebren $K\langle X^{1/p^\infty}\rangle_\rho$ zu tilten und danach wieder zu vereinigen. Für $\rho = 1$ sagt [Sch12b, Proposition 5.20], dass $K\langle X^{1/p^\infty}\rangle_1$ eine perfektoide K-Algebra ist und beschreibt den Tilt. Wir werden mit Hilfe von Lemma 5.1.5 zeigen, dass dies auch für $\rho \neq 1$ möglich ist und dabei den Beweis aus [Sch12b] wiederholen. Für einen perfektoiden Körper K sei wie in Kapitel 4 ein Element $\varpi \in K^\times$ mit $|p| \leq |\varpi| < 1$ gewählt.

Satz 5.2.1. *Sei K ein perfektoider Körper. Dann ist die K-Algebra $R = K\langle X^{1/p^\infty}\rangle_\rho$ eine perfektoide K-Algebra und ihr Tilt ist durch*

$$R^\flat = K^\flat\langle X^{1/p^\infty}\rangle_\rho$$

gegeben.

Lemma 5.2.2 ([Sch12b, Proposition 5.20])**.** *Für $\rho = (1,\ldots,1)$ ist die Aussage aus dem obigen Satz 5.2.1 wahr.*

Beweis. Wir zeigen zuerst, dass $(K\langle X^{1/p^\infty}\rangle_1)^o/\varpi$ perfekt ist. Mit Satz 2.3.13 gibt es einen kanonischen Isomorphismus

$$K\langle X^{1/p^\infty}\rangle_1^o/\varpi \cong (K[X^{1/p^\infty}], |\cdot|_1)^o/\varpi.$$

Es reicht daher zu zeigen, dass die rechte Seite perfekt ist. Nach Definition von $|\cdot|_1$ gilt $(K[X^{1/p^\infty}], |\cdot|_1)^o = K^o[X^{1/p^\infty}]$ und es ergibt sich insgesamt

$$K\langle X^{1/p^\infty}\rangle_1^o/\varpi \cong (K[X^{1/p^\infty}], |\cdot|_1)^o/\varpi = K^o[X^{1/p^\infty}]/\varpi \cong (K^o/\varpi)[X^{1/p^\infty}]$$

Sei nun $f = \sum_\nu \bar{c}_\nu X^{\nu/p^m} \in (K^o/\varpi)[X^{1/p^\infty}]$ gegeben. Da K^o/ϖ perfekt ist, gibt es $\bar{b}_\nu \in K^o/\varpi$ mit $\bar{b}_\nu^p = \bar{c}_\nu$. Dann ist

$$(\sum_\nu \bar{b}_\nu X^{\nu/p^{m+1}})^p = f$$

und daher $K\langle X^{1/p^\infty}\rangle_1^o/\varpi$ perfekt. Da $K\langle X^{1/p^\infty}\rangle_1$ per Definition vollständig ist, ist dies also eine perfektoide K-Algebra.
Es gilt $K^o/\varpi \cong K^{\flat o}/\varpi^\flat$ und mit Lemma 4.3.13 folgt aus

$$K\langle X^{1/p^\infty}\rangle_1^o/\varpi \cong (K^o/\varpi)[X^{1/p^\infty}] \cong (K^{\flat o}/\varpi^\flat)[X^{1/p^\infty}] \cong K^\flat\langle X^{1/p^\infty}\rangle_1^o/\varpi^\flat,$$

dass $K^\flat\langle X^{1/p^\infty}\rangle_1$ tatsächlich der Tilt von $K\langle X^{1/p^\infty}\rangle_1$ ist. □

Beweis von Satz 5.2.1. Wir benutzen die Notation von Lemma 5.1.5. Der Isomorphismus

$$\tau_\rho : K[X^{1/p^\infty}] \to K[X^{1/p^\infty}] \quad ; \quad X^{1/p^m} \mapsto r^{1/p^m} X^{1/p^m}$$

induziert wegen $|f|_\rho = |\tau_\rho(f)|_1$ einen Isomorphismus

$$(K[X^{1/p^\infty}], |\cdot|_\rho)^o \cong (K[X^{1/p^\infty}], |\cdot|_1)^o = K^o[X^{1/p^\infty}].$$

Insbesondere ergibt sich

$$(K[X^{1/p^\infty}], |\cdot|_\rho)^o/\varpi \cong (K^o/\varpi)[X^{1/p^\infty}].$$

Nun folgt die Aussage wie im Beweis für $\rho = (1, \dots, 1)$. $\square$

Wir definieren nun „den Tilt der überkonvergenten Potenzreihen“ als

$$W^\flat = \bigcup (K\langle X^{1/p^\infty}\rangle_\rho = \bigcup K^\flat\langle X^{1/p^\infty}\rangle_\rho.$$

Wir merken abschließend an, dass man W via

$$W^\flat = \bigcup K^\flat\langle X^{1/p^\infty}\rangle_\rho = \bigcup \varprojlim_{x\mapsto x^p} K\langle X^{1/p^\infty}\rangle_\rho \to \varprojlim_{x\mapsto x^p} \bigcup K\langle X^{1/p^\infty}\rangle_\rho = \varprojlim_{x\mapsto x^p} W,$$

einbetten kann. Man kann aber zeigen, dass diese Einbettung im Allgemeinen nicht surjektiv ist.

Nachdem die überkonvergenten Potenzreihen konstruiert sind, kann man die Quotienten W/I untersuchen. Es stellt sich die Frage, inwieweit sich ihre rigiden Räume und zugehörigen Schemata im Vergleich zu den Dagger-Algebren aus [GK00] verhalten. Gegebenenfalls sind ist dann die deRham-Kohomologie und andere Kohomologie-Theorien dieser Räume zu untersuchen und festzustellen, ob diese auch endlich-dimensional ist und sich Dualitätsaussagen treffen lassen.

Auf der anderen Seite stellt sich die Frage, inwieweit diese Konstruktionen sich mit dem Vorgehen von Scholze weiterführen lassen. Die Theorie der perfektoiden Räume ist relativ neu und offene Fragen sind noch zu beantworten; siehe dazu [Sch12a]. Es ist zu untersuchen, ob die überkonvergenten Potenzreihen dabei eine Rolle spielen können.

Leider war die nähere Beschäftigung mit diesen Fragen im Rahmen der Arbeit nicht möglich. Wir hoffen aber, mit der Arbeit einen Ausgangspunkt dafür geschaffen zu haben.

6 Anhang

In diesem Anhang führen wir einige Rechnungen und Beweise, die wir aus Platzgründen im Hauptteil weggelassen haben. Bis auf den gleich folgenden Beweis, sind die Rechnungen konzentrierte Anwendungen der Definitionen. Der Beweis wurde mir von L. Ramero per E-Mail mitgeteilt.

Beweis von Satz 3.1.4 (b). Wir nehmen zuerst an, dass $f : M \to N$ ein Fast-Isomorphismus ist. Wir betrachten die exakten Sequenzen

$$0 \to K \to M \xrightarrow{p} M/K \to 0 \quad \text{und} \quad 0 \to M/K \xrightarrow{f'} N \to C \to 0,$$

wobei $K = \ker(f)$ und $C = \operatorname{coker}(f)$ nach Voraussetzung fast null sind. Wir tensorieren mit $\mathfrak{m}$ und erhalten mit Satz 3.1.4 (a) die zwei exakten Sequenzen

$$0 \to \mathfrak{m} \otimes_V M \to \mathfrak{m} \otimes_V (M/K) \to 0 \quad \text{und} \quad \operatorname{Tor}^1(C, \mathfrak{m}) \to \mathfrak{m} \otimes_V (M/K) \to \mathfrak{m} \otimes_V N \to 0$$

Tensorieren wir die linke Sequenz erneut mit $\mathfrak{m}$ erhalten wir den Isomorphismus $\widetilde{p} : \widetilde{\mathfrak{m}} \otimes_V M \xrightarrow{\sim} \widetilde{\mathfrak{m}} \otimes_V (M/K)$. Da $\operatorname{Tor}^1(-, \mathfrak{m})$ ein additiver Funktor ist und wir eine Multiplikation mit einem Element $x \in \mathfrak{m}$ als V-lineare Abbildung $C \to C$ auffassen können, folgt aus $\mathfrak{m}C = 0$ bereits $\mathfrak{m} \operatorname{Tor}^1(C, \mathfrak{m}) = 0$. Nach Satz 3.1.4 (a) gilt dann auch $\mathfrak{m} \otimes_V \operatorname{Tor}^1(C, \mathfrak{m}) = 0$. Wenn wir die rechte Sequenz oben erneut mit $\mathfrak{m}$ tensorieren, erhalten wir also einen Isomorphismus $\widetilde{f'} : \widetilde{\mathfrak{m}} \otimes_V (M/K) \xrightarrow{\sim} \widetilde{\mathfrak{m}} \otimes_V N$. Es ist also $\widetilde{f} = \widetilde{f' \circ p} = \widetilde{f'} \circ \widetilde{p}$ ein Isomorphismus.
Induziere umgekehrt eine V-lineare Abbildung $f : M \to N$ einen Isomorphismus $\widetilde{f} : \widetilde{M} \xrightarrow{\sim} \widetilde{N}$. Wir wollen zeigen, dass $K = \ker(f)$ und $C = \operatorname{coker}(f)$ fast null sind. Da Tensorieren rechtsexakt ist, ist $\widetilde{C}$ der Cokern von $\widetilde{f}$. Nach Voraussetzung ist also $\widetilde{C} = 0$, woraus mit Aussage (a) folgt, dass C fast null ist. Wie oben erhalten wir nun den Isomorphismus $\widetilde{f'} : \widetilde{\mathfrak{m}} \otimes_V (M/K) \xrightarrow{\sim} \widetilde{\mathfrak{m}} \otimes_V N$. Nach Voraussetzung ist $\widetilde{f} = \widetilde{f'} \circ \widetilde{p}$ ein Isomorphismus, daher auch $\widetilde{p} : \widetilde{\mathfrak{m}} \otimes_V M \xrightarrow{\sim} \widetilde{\mathfrak{m}} \otimes_V (M/K)$. Nun erhalten wir aber aus der exakten Sequenz $K \to M \xrightarrow{p} M/K \to 0$ die exakte Sequenz

$$\widetilde{K} \to \widetilde{M} \xrightarrow{\widetilde{p}} \widetilde{M/K} \to 0.$$

Da $\widetilde{p}$ Isomorphismus ist, ist $\widetilde{K} = 0$ und nach Satz 3.1.4 (a) der Kern K fast null. $\square$

Es folgen der Vollständigkeit halber Definitionen von A-Moduln und A-Algebren in einer Tensorkategorie.

Definition 6.0.3. Sei $(\mathcal{C}, \otimes)$ eine abelsche Tensorkategorie und A eine $\mathcal{C}$-Algebra. Dann ist ein Objekt M aus $\mathcal{C}$ zusammen mit einem Morphismus $\sigma_{M/A} : A \otimes M \to M$, ein *$A$-Modul*, wenn die folgenden Diagramme kommutieren. Wir lassen die Assoziativitätsbedingungen weg.

$$\begin{tikzcd} A\otimes A\otimes M \arrow[r, "\mu_A\otimes 1_M"] \arrow[d, "1_A\otimes\sigma_{M/A}"] & A\otimes M \arrow[d, "\sigma_{M/A}"] \\ A\otimes M \arrow[r, "\sigma_{M/A}"] & M \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} U\otimes M \arrow[r, "1_A\otimes 1"] \arrow[dr, "u_M^{-1}"'] & A\otimes M \arrow[d, "\sigma_{M/A}"] \\ & M \end{tikzcd}$$

Ein A-Modul Morphismus $f : M \to N$ ist ein Morphismus in $\mathcal{C}$, sodass das Diagramm

$$\begin{tikzcd} A\otimes M \arrow[r, "1\otimes f"] \arrow[d, "\sigma_{A/M}"] & A\otimes N \arrow[d, "\sigma_{N/A}"] \\ M \arrow[r, "f"] & N \end{tikzcd}$$

kommutiert.

In [GR03, 2.2.7]] wird folgende Tatsache bemerkt:
Sei in der Kategorie $\mathcal{C}$ der Funktor $\otimes$ exakt, wenn man jeweils ein Argument festhält. Sei A eine $\mathcal{C}$-Algebra. Dann ist die Kategorie der A-Moduln abelsch.

Definition 6.0.4. Mit den Voraussetzungen der obigen Definition ist eine $\mathcal{C}$-Algebra B zusammen mit einem $\mathcal{C}$-Algebra-Morphismus $A \to B$ eine A-Algebra. Ein Morphismus von A-Algebren $B \to B'$ ist eine $\mathcal{C}$-Algebra-Morphismus, sodass

$$\begin{tikzcd} & A \arrow[dl] \arrow[dr] & \\ B \arrow[rr] & & B' \end{tikzcd}$$

kommutiert.

Für $\mathcal{C} = V^a$-**Mod** erhält man dann auf kanonische Weise Fast-Elemente-Funktoren

$$A\text{-}\mathbf{Mod} \to A_*\text{-}\mathbf{Mod} \text{ und } A\text{-}\mathbf{Alg} \to A_*\text{-}\mathbf{Alg}.$$

Schließlich sagt [GR03, Remark 2.2.13], dass es für eine V-Algebra W Äquivalenzen von Kategorien gibt:

$$(W, \mathfrak{m}W)^a\text{-}\mathbf{Mod} \sim W^a\text{-}\mathbf{Mod} \text{ und } (W, \mathfrak{m}W)^a\text{-}\mathbf{Alg} \sim W^a\text{-}\mathbf{Alg}.$$

Damit kann man dann [GR03, Proposition 2.2.14] für den allgemeinen Fall beweisen.

Beweis von Satz 3.3.9. Wir zeigen die beispielhaft die Natürlichkeit der Kommutativitätsbedingung:
Man rechnet nach, dass in V-**Mod** die Gleichheit $\widetilde{\Psi_{M_0,N_0}}\alpha = \alpha\Psi_{\widetilde{M_0},\widetilde{N_0}}$ gilt. Sei dann $f : M_0^a \to (M_0')^a$ ein Morphismus in V^a-**Mod**. In V-**Mod** gilt dann

$$(1 \otimes f) \circ \Psi^a_{M_0,N_0} = \alpha(1 \otimes_V f)\alpha^{-1}\widetilde{\Psi_{M_0,N_0}}$$

$$\Psi^a_{M_0',N_0} \circ (f \otimes 1) = \widetilde{\Psi_{M_0',N_0}}\alpha(f \otimes_V 1)\alpha^{-1}$$

und wir haben wegen der Natürlichkeit von Ψ_{M,N_0}, dass

$$\alpha(1 \otimes_V f)\alpha^{-1}\widetilde{\Psi_{M_0,N_0}}\alpha = \alpha(1 \otimes_V f)\Psi_{\widetilde{M_0},\widetilde{N_0}} = \alpha\Psi_{\widetilde{M_0'},\widetilde{N_0}}(f \otimes_V 1) = \widetilde{\Psi_{M_0',N_0}}\alpha(f \otimes_V 1).$$

Es gilt also tatsächlich $(1 \otimes f) \circ \Psi M, N = \Psi_{(M'),N} \circ (f \otimes 1)$ in V^a-**Mod**. Wir haben also Natürlichkeit von Ψ^a im ersten Argument. Analog folgt die Natürlichkeit im zweiten Argument. Die Natürlichkeit von $\Phi^a_{M,N,P}$ folgt ebenso aus der Natürlichkeit in den Argumenten von Φ und der Beobachtung, dass $\widetilde{\Phi_{M_0,N_0,P_0}}\alpha(1 \otimes_V \alpha) = \alpha(\alpha \otimes_V 1)\Phi_{\widetilde{M_0},\widetilde{N_0},\widetilde{P_0}}$ gilt. $\square$

Beweis von Satz 3.4.1. (a) Vergleiche [DMOS82, S. 119]. Wir müssen zeigen, dass für $\alpha, \beta \in \mathrm{End}_{\mathcal{C}}(U)$ gilt:

$$\alpha \circ \beta = \beta \circ \alpha$$

Sei zunächst M Objekt in $\mathcal{C}$ und $\alpha : U \to U$. Dann definiere $g(\alpha) = u_M^{-1} \circ (\alpha \otimes 1_M) \circ u_M$.

$$\begin{tikzcd}
M \arrow[r, "u_M"] \arrow[d, "g(\alpha)"] & U \otimes M \arrow[d, "\alpha\otimes 1_M"] \\
M \arrow[r, "u_M"] & U \otimes M
\end{tikzcd}$$

Offensichtlich gilt $g(\alpha \circ \beta) = g(\alpha) \circ g(\beta)$. Sei $f \in \mathrm{End}_{\mathcal{C}}(M)$. Aus dem kommutativen Diagramm

$$\begin{tikzcd}
M \arrow[r, "u_M"] \arrow[d, "g(\alpha)"] & U \otimes M \arrow[r, "1_{U\otimes M}"] \arrow[d, "\alpha\otimes 1_M"] & U \otimes M \arrow[r, "u_M^{-1}"] \arrow[d, "1_U\otimes g"] & M \arrow[d, "f"] \\
M \arrow[r, "u_M"] \arrow[d, "f"] & U \otimes M \arrow[d, "1_U\otimes f"] & U \otimes M \arrow[r, "u_M^{-1}"] \arrow[d, "\alpha\otimes 1_M"] & M \arrow[d, "g(\alpha)"] \\
M \arrow[r, "u_M"] & U \otimes M \arrow[r, "1_{U\otimes M}"] & U \otimes M \arrow[r, "u_M^{-1}"] & M
\end{tikzcd}$$

folgt $f \circ g(\alpha) = g(\alpha) \circ f$. Insbesondere ergibt sich mit $M = U$ und $f = g(\beta)$ dann

$$g(\beta \circ \alpha) = g(\alpha \circ \beta).$$

Es gilt also $(\alpha\beta) \otimes 1_U = (\beta\alpha) \otimes 1_U$. Da die Kommutativitätsbedingung $\Psi_{U,U}$ ein Isomorphismus ist, folgt $1_U \otimes (\alpha\beta) = 1_U \otimes (\beta\alpha)$. Da $u_U : U \mapsto U \otimes U$ eine Äquivalenz von Kategorien ist, folgt $\alpha \circ \beta = \beta \circ \alpha$.
Gilt für die Kommutativitätsbedingung $\Psi_{U,U} = 1_{U,U}$ vereinfacht sich der Beweis.

(b) Die Aussage folgt sofort aus den Definitionen, bis auf die Assoziativität der Skalarmultiplikation. Diese gilt, weil $\mathrm{End}_{\mathcal{C}}(U)$ nach (a) kommutativer Ring ist.

(c) Wir betrachten das folgende Diagramm:

$$\begin{tikzcd}
U \arrow[r, "u"] \arrow[d, "u"] & U \otimes U \arrow[d, "1\otimes u"] \\
U \otimes U \arrow[r, "u_{U\otimes U}"] \arrow[d, "1"] & U \otimes (U \otimes U) \arrow[d, "\Phi"] \\
U \otimes U \arrow[r, "u\otimes 1"] & U
\end{tikzcd}$$

Das obere Rechteck kommutiert, da $u_M : M \to U \otimes M$ ein natürlicher Isomorphismus ist und $u = u_U$ ist. Das untere Rechteck kommutiert nach [DMOS82, Proposition 1.3]. Zusammen mit der Assoziativität von μ_A ergibt sich daraus die Assoziativität der Multiplikation auf A_*.
Analog folgen die anderen Aussagen, wobei man $\alpha \otimes \beta = 1_U \otimes (\alpha \circ \beta)$ für $\alpha, \beta \in \mathrm{End}_{\mathcal{C}}(U)$ benutzt, um zu zeigen, dass $\underline{1}_{A_*} : \mathrm{End}_{\mathcal{C}}(U) \to A_*$ multiplikativ ist. Ein Beweis, der ohne diese Voraussetzung auskommt, ist uns nicht bekannt. $\square$

Beweis von Bemerkung 3.4.3. Wir nehmen für $\alpha \in \mathrm{End}_{\mathcal{C}}(U)$ an, dass $1_U \otimes \alpha = \alpha \otimes 1_U$ gilt (Bemerkung 3.3.4). Dann ergibt sich die Behauptung aus dem folgenden, kommutativen Diagramm.

$$\begin{tikzcd}
U \arrow[r, "u"] \arrow[d, "\alpha"] & U \otimes U \arrow[d, "\alpha\otimes 1_U"] \\
U \arrow[r, "u"] \arrow[dd, "\beta"] & U \otimes U \arrow[d, "1_U\otimes\beta"] \\
 & U \otimes A \arrow[dl, "u_A^{-1}"'] \arrow[d, "\underline{1}_A\otimes 1_A"] \\
A & A \otimes A \arrow[l, "\mu_A"]
\end{tikzcd}$$

□

Beweis von Lemma 3.4.16. Aus der Konstruktion der Adjunktion ergibt sich für $f : M_0^a \to N$ und $x \in M_0$, dass

$$j(f)(x) = (\widetilde{V} \to \widetilde{N_0} \quad ; \quad \widetilde{b} \otimes v \mapsto f(\widetilde{b} \otimes vx))$$

mit $\widetilde{b} = b \otimes b' \in \mathfrak{m} \otimes \mathfrak{m}$ und $v \in V$. Sei $g : M_0'^a \to N'$ ein weiterer Morphismus in V^a-**Mod**, dann müssen wir

$$j(f \otimes g) = t_{N,N'} \circ (j(f) \otimes_V j(g)) : M_0 \otimes_V M_0' \to (N \otimes N')_*$$

zeigen. Der linke Morphismus schickt einen Erzeuger $x \otimes y \in M_0 \otimes_V M_0'$ auf die Abbildung

$$\widetilde{V} \to \widetilde{N_0 \otimes_V N_0'} \quad ; \quad \widetilde{b} \otimes v \mapsto \gamma(f \otimes_V g)\gamma^{-1}(v\widetilde{b} \otimes x \otimes y).$$

Ist $\widetilde{b} = b_1 b_1' \otimes b_2 b_2' \in \widetilde{\mathfrak{m}}$ und dann ergibt sich

$$\widetilde{b} \otimes v \mapsto \gamma(f(vb_1 \otimes b_2 \otimes x) \otimes g(b_1' \otimes b_2' \otimes y)).$$

Der rechte Morphismus schickt den Erzeuger $x \otimes y$ per Definition von $t_{N,N'}$ auf die Abbildung

$$\widetilde{V} \xrightarrow{u} \widetilde{V \otimes_V V} \xrightarrow{\gamma^{-1}} \widetilde{V} \otimes_V \widetilde{V} \xrightarrow{j(f)(x) \otimes_V j(g)(y)} \widetilde{N_0} \otimes_V \widetilde{N_0'} \xrightarrow{\gamma} \widetilde{N_0 \otimes_V N_0'}.$$

Für das Element $\widetilde{b} \otimes v \in \widetilde{V}$ ergibt sich also

$$\widetilde{b} \otimes v \mapsto \widetilde{b} \otimes v \otimes 1 \mapsto b_1 \otimes b_2 \otimes v \otimes b_1' \otimes b_2' \otimes 1 \mapsto \gamma(f(vb_1 \otimes b_2 \otimes x) \otimes g(b_1' \otimes b_2' \otimes y)),$$

woraus die Aussage folgt. □

Beweis von Satz 5.1.2. Seien im Folgenden ohne Einschränkung $f, g \in A[X^{1/p^\infty}]$ mit $f = \sum_{\nu \in \mathbb{N}^n} c_\nu (X^{1/p^m})^\nu$ und $g = \sum_{\nu \in \mathbb{N}^n} d_\nu (X^{1/p^m})^\nu$. Indem wir $\rho = \rho^{1/p^m}$ setzen, können wir ohne Einschränkung annehmen, dass $m = 0$.
Aus der Definition des ρ-Betrages ist sofort klar, dass $|f|_\rho = 0$ genau dann, wenn $f = 0$. Ebenso klar ist, dass für ein $c \in A$ bereits $|cf|_\rho = |c||f|_\rho$ gilt. Weiterhin haben wir

$$|f + g|_\rho = \max_{\nu \in \mathbb{N}^n} \{|c_\nu + d_\nu|\rho^\nu\} \leq \max_{\nu \in \mathbb{N}^n} \{\max(|c_\nu|, |d_\nu|)\rho^\nu\} =$$

$$= \max(\max_{\nu \in \mathbb{N}^n} \{|c_\nu|\rho^\nu\}, \max_{\nu \in \mathbb{N}^n} \{|d_\nu|\rho^\nu\}) = \max(|f|_\rho, |g|_\rho).$$

Gleichermaßen folgt

$$|fg|_\rho = \max_{\nu \in \mathbb{N}^n} \{|\sum_{\mu+\lambda=\nu} c_\mu d_\lambda|\rho^\nu\} \leq \max_{\mu,\lambda \in \mathbb{N}^n} \{|c_\mu|\rho^\mu \cdot |d_\lambda|\rho^\lambda\} \leq |f|_\rho |g|_\rho.$$

Sei nun A ein bewerteter Ring. Wir müssen noch $|fg|_\rho \geq |f|_\rho |g|_\rho$. zeigen. Dazu betrachten wir die lexikographische Ordnung $\leq_l$ auf $\mathbb{N}^n$. Seien dann μ, λ minimal bezüglich $\leq_l$ mit $|f|_\rho = |c_\mu|\rho^\mu$ und $|g|_\rho = |d_\lambda|\rho^\lambda$. Wir behaupten, dass

$$|fg|_\rho = |c_\mu||d_\lambda|\rho^{\mu+\lambda} = |f|_\rho |g|_\rho.$$

Wir betrachten den $(\mu + \lambda)$-ten Koeffizienten von fg und schreiben für ihn

$$e_{\mu+\lambda} = c_\mu d_\lambda + \sum_{\mu'+\lambda'=\mu+\lambda, \mu' \neq \mu, \lambda' \neq \lambda} c_{\mu'} d_{\lambda'}.$$

Es reicht zu zeigen, dass $|e_{\mu+\lambda}| \geq |c_\mu||d_\lambda|$, denn daraus folgt

$$|fg|_\rho \geq |e_{\mu+\lambda}|\rho^{\mu+\lambda} \geq |c_\mu||d_\lambda|\rho^{\mu+\lambda} = |f|_\rho |g|_\rho.$$

Ohne Einschränkung sei $\mu' \leq_l \mu$ und $\mu' \neq \mu$. Nach Wahl von μ, λ folgt $|c_\mu d_\lambda| > (|c'_\mu|\rho^{\mu'-\mu})(|d'_\lambda|\rho^{\lambda'-\lambda}) = |c_{\mu'} d_{\lambda'}|$ für $\mu' + \lambda' = \mu + \lambda$. Aus Satz 2.1.2 (e) ergibt sich dann $|e_{\mu+\lambda}| = |c_\mu||d_\lambda|$. □

Beweis von Bemerkung 5.1.4. Wir zeigen für einen nicht-diskret bewerteten Körper K und $\rho = (\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_n) \in \mathbb{R}^n_{>0}$, dass für

$$f = \sum_{\nu \in \mathbb{N}^n} c_\nu X_1^{\nu_1} \ldots X_n^{\nu_n}$$

die Gleichung

$$\max_\nu \{|c_\nu|\rho_1^{\nu_1} \ldots \rho_n^{\nu_n}\} = \sup_{x \in P(\rho)} \{|f(x)|\}$$

gilt. Dabei ist $P(\rho)$ die Menge der $x = (x_1, \ldots x_n) \in K^n$ für die $|x_i| \leq \rho_i$ gilt. Der Beweis kann auf Polynome mit p^n-ten Wurzeln übertragen werden, wenn die Wurzeln der Elemente x_i existieren.

Sei $\varepsilon > 0$. Sei N_1 die Menge der $\nu \in \mathbb{N}^n$, für die

$$|c_\nu|\rho^\nu = |f|$$

gilt. Sei $\mu \in N_1$ das maximale Element unter der lexikographischen Ordnung. Wir benutzen im Folgenden mehrmals die Stetigkeit der Abbildungen $F_\nu : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}; (r_1, \ldots r_n) \mapsto |c_\nu| r_1^{\nu_1} \cdots r_n^{\nu_n}$. Aus dieser Stetigkeit folgt, dass es ein $\varepsilon > \varepsilon_1 > 0$ gibt, sodass

$$|c_\mu|(\rho_1 + \varepsilon_1)^{\mu_1} \rho_2^{\mu_2} \cdots \rho_n^{\mu_n} > |c_\nu|(\rho_1 + \varepsilon)^{\nu_1} \rho_2^{\nu_2} \cdots \rho_n^{\nu_n}$$

für alle $\nu \notin N_1$ gilt. Sei N_2 die Menge der $\mu \in N_1$ für die die linke Seite der Gleichung maximal ist. Betrachte wieder das Maximum μ' unter der lexikographischen Ordnung von N_2 und wähle $\varepsilon > \varepsilon_2 > 0$, sodass

$$|c_{\mu'}|(\rho_1 + \varepsilon_1)^{\mu'_1} (\rho_2 + \varepsilon_2)^{\mu'_2} \cdots \rho_n^{\mu'_n} > |c_\nu|(\rho_1 + \varepsilon)^{\nu_1} \rho_2^{\nu_2} \cdots \rho_n^{\nu_n}$$

für alle $\nu \notin N_1 \cap N_2$ gilt. Induktiv findet man so $\varepsilon > \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n > 0$ und ein Element $\mu'' \in \mathbb{N}^n$, sodass

$$|c_{\mu''}|(\rho_1 + \varepsilon_1)^{\mu''_1} \cdots (\rho_n + \varepsilon_n)^{\mu''_n} > |c_\nu|(\rho_1 + \varepsilon)^{\nu_1} \rho_2^{\nu_2} \cdots \rho_n^{\nu_n}$$

für alle $\nu \neq \mu''$ gilt. Wiederum wegen Stetigkeit und da K nicht-diskret bewertet ist, gibt es ein $x = (x_1, \ldots x_n) \in K^n$ sodass

$$|c_{\mu''}| \cdot |x_1|^{\mu''_1} \cdots |x_n|^{\mu''_n} > |c_\nu| \cdot |x_1|^{\nu_1} \cdots |x_n|^{\nu_n}$$

für alle $\nu \neq \mu''$ gilt. Insbesondere gilt

$$|f(x)| = |c_{\mu''}| \cdot |x_1|^{\mu''_1} \cdots |x_n|^{\mu''_n}.$$

Indem man $\varepsilon \to 0$ laufen lässt, folgt die Aussage. $\square$

Bemerkung 6.0.5. Ein einfaches Beispiel für eine Einbettung metrischer Räume

$$\iota : M_1 \to M_2,$$

sodass für die Vervollständigungen

$$\widehat{\iota} : \widehat{M_1} \to \widehat{M_2}$$

nicht injektiv ist, ist

$$M_1 = [0,1) \cup \{2\} \to [1,2] = M_2 \quad ; \quad x \mapsto \begin{cases} x+1, & \text{wenn } x \neq 2 \\ 2, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Dabei fassen wir M_1, M_2 als Unterräume der reellen Zahlen auf. Für halbnormierte Ringe, die keine normierten Ringe sind, lässt sich ebenfalls ein triviales Beispiel angeben, indem wir $\mathbb{Z}$ einmal mit der p-adischen Bewertung und einmal mit der Halbnorm $|\cdot| = 0$ ausstatten.
Für bewertete Ringe ist mir kein Beispiel bekannt und ich wäre über einen Hinweis dankbar.

Literatur

[AM69] M. F. Atiyah and I. G. Macdonald. *Introduction to commutative algebra.* Addison-Wesley Publishing Co., Reading, Mass.-London-Don Mills, Ont., 1969.

[BGR84] S. Bosch, U. Güntzer, and R. Remmert. *Non-Archimedean analysis*, volume 261 of *Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften [Fundamental Principles of Mathematical Sciences]*. Springer-Verlag, Berlin, 1984. A systematic approach to rigid analytic geometry.

[Bor94] Francis Borceux. *Handbook of categorical algebra. 1*, volume 50 of *Encyclopedia of Mathematics and its Applications.* Cambridge University Press, Cambridge, 1994. Basic category theory.

[Bos08] S. Bosch. Lectures on formal and rigid geometry. http://wwwmath.uni-muenster.de/sfb/about/publ/heft378.pdf, 2008.

[Bou61] N. Bourbaki. *Éléments de mathématique. Fascicule XXVII. Algèbre commutative. Chapitre 1: Modules plats. Chapitre 2: Localisation.* Actualités Scientifiques et Industrielles, No. 1290. Herman, Paris, 1961.

[Bou64] N. Bourbaki. *Éléments de mathématique. Fasc. XXX. Algèbre commutative. Chapitre 5: Entiers. Chapitre 6: Valuations.* Actualités Scientifiques et Industrielles, No. 1308. Hermann, Paris, 1964.

[Bou66] Nicolas Bourbaki. *Elements of mathematics. General topology. Part 1.* Hermann, Paris, 1966.

[Del71] P. Deligne. Théorie de hodge. i. In *Actes du Congrès International des Mathématiciens (Nice 1970)*, volume 1, pages 425–430. Gauthier-Villars, 1971.

[DMOS82] Pierre Deligne, James S. Milne, Arthur Ogus, and Kuang-yen Shih. *Hodge cycles, motives, and Shimura varieties*, volume 900 of *Lecture Notes in Mathematics.* Springer-Verlag, Berlin, 1982.

[Fal88] G. Faltings. p-adic hodge theory. *J. Americ. Math. Soc*, 1:255–299, 1988.

[FW79] Jean-Marc Fontaine and Jean-Pierre Wintenberger. Extensions algébrique et corps des normes des extensions APF des corps locaux. *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. A-B*, 288(8):A441–A444, 1979.

[Gab62] Pierre Gabriel. Des catégories abéliennes. *Bull. Soc. Math. France*, 90:323–448, 1962.

[GK99] Elmar Große-Klönne. derham-kohomologie in der rigiden analysis. *Preprintreihe des SFB 478 - Geometrische Strukturen in der Mathematik der Universität Münster*, 39, 1999.

[GK00] Elmar Grosse-Klönne. Rigid analytic spaces with overconvergent structure sheaf. *J. Reine Angew. Math.*, 519:73–95, 2000.

[GR03] Ofer Gabber and Lorenzo Ramero. *Almost ring theory*, volume 1800 of *Lecture Notes in Mathematics*. Springer-Verlag, Berlin, 2003.

[GR12] O. Gabber and L Ramero. Foundations for almost ring theory - sixth release. arXiv:math/0409584, 2012.

[Hub93] R. Huber. Continuous valuations. *Math. Z.*, 212(3):455–477, 1993.

[MW68] P. Monsky and G. Washnitzer. Formal cohomology: I. *Math. Ann.*, 88:181–217, 1968.

[Neu92] Jürgen Neukirch. *Algebraische Zahlentheorie*. Springer Berlin Heidelberg, 1992.

[Sch02] Peter Schneider. *Nonarchimedean functional analysis*. Springer Monographs in Mathematics. Springer-Verlag, Berlin, 2002.

[Sch12a] P. Scholze. Perfectoid spaces: A survey. http://www.math.uni-bonn.de/people/scholze/CDM.pdf, 2012.

[Sch12b] Peter Scholze. Perfectoid spaces. *Publications mathématiques de l'IHÉS*, 116(1):245–313, 2012.

[Tat71] J. Tate. Rigid analytic spaces. *Invent. math.*, 12, 1971.

[Ter98] T. Terasoma. Monodromy weight filtration is independent of l. arXiv:math/9802051, 1998.

[TSH98] Nobuhiko Tatsuuma, Hiroaki Shimomura, and Takeshi Hirai. On group topologies and unitary representations of inductive limits of topological groups and the case of the group of diffeomorphisms. *J. Math. Kyoto Univ.*, 38(3):551–578, 1998.

Hiermit versichere ich, dass ich diese Arbeit selbstständig verfasst und nur die angegebenen Quellen und Hilfsmittel benutzt habe.

Danksagung: Ich möchte Frau Prof. Dr. Huber-Klawitter für die freundliche Betreuung dieser Arbeit danken. Ihre Tür stand immer offen und viele meiner Fragen und Probleme konnten in einem Gespräch geklärt werden. Ein besonderer Dank an L. Ramero für seine schnelle und freundliche Antwort per E-Mail. Bei Max Schmidkte bedanke ich mich für das Lesen von Kapitel 2 und 3, bei Jonathan Schiefer für seine LaTex-Hilfe. Alex Koenen hat sich geduldig zwei Epsilontik-Beweise angehört und alle anderen Sorgen einer Diplomarbeit. Ich werde ihn nicht vergessen! Für die außer-mathematische Unterstützung, die ich von vielen Seiten erfahren habe, möchte ich mich besonders bei meinen Freunden, meiner Familie und meiner Freundin Eva bedanken.