Skript

Lineare Algebra, Analytische Geometrie II

gehört bei
Prof. Dr. Annette Huber-Klawitter
Universität Leipzig

Stand: 27. November 2006

Zusammengestellt von
Marcel Dennhardt

Dieses Skript fasst die Mitschriften der Vorlesung *Lineare Algebra, Analytische Geometrie II* aus dem Sommersemester 2006 bei Frau Prof. Dr. Annette Huber-Klawitter zusammen. Die Vorlesung knüpft an den ersten, von Prof. Dr. Bernd Herzog gehaltenen Teil aus dem Wintersemester 2005/2006 an.

Für Fehlerfreiheit kann nicht garantiert werden. Werden Fehler gefunden, so bitte ich deswegen, mir selbige per E-Mail (mathe@macdevil.net) mitzuteilen.

Das Skript wird in Absprache mit Frau Prof. Dr. Annette Huber-Klawitter vorlesungsbegleitend aktualisiert und ergänzt. Die jeweils aktuellste Version ist unter www.macdevil.net verfügbar. Die vorliegende Version stammt vom 27. November 2006.

Inhaltsverzeichnis

5 Eigenwerte und Eigenvektoren

Definition 5.1. Sei $f : V \to V$ Endomorphismus eines Vektorraums V. Ein Vektor $v \in V \setminus \{0\}$ heißt *Eigenvektor* zum *Eigenwert* $\lambda \in K$, falls gilt:

$$f(v) = \lambda v$$

Eine Basis $v_1, \ldots, v_n$ von V heißt *Eigenbasis*, falls alle v_i Eigenvektoren sind (zu beliebigen Eigenwerten).

Zu $\lambda \in K$ heißt

$$V_\lambda = \{v \in V : f(v) = \lambda v\}$$

Eigenraum zu λ.

Beispiel.

a) $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ Spiegelung: Die Abbildung lässt den Vektor „$\rightarrow$" fest, er ist Eigenvektor zum Eigenwert 1. „$\uparrow$" und „$\downarrow$" sind Eigenvektoren zum Eigenwert -1.

b) $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ Rotation um Winkel α: Die Abbildung lässt keinen Vektor fest. Es gibt keine Eigenvektoren, außer bei:
$\alpha = 0\,°, 360\,°, \ldots$: Alle Vektoren sind Eigenvektoren zum Eigenwert 1: $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R}^2_1$
$\alpha = 180\,°, \ldots$: Punktspiegelung am Ursprung, Eigenwert -1: $\mathbb{R}^2_{-1} = \mathbb{R}^2$

Bemerkung.

(i) $v = 0$ wird ausgeschlossen, denn $\lambda \cdot 0 = 0$ für alle $\lambda \in K$. $\lambda = 0$ ist erlaubt.

(ii) V_λ ist Untervektorraum von V.

(iii) λ Eigenvektor $\Leftrightarrow V_\lambda \neq 0$

(iv) Begriffe der englischen Literatur: *eigenvector*, *eigenvalue*, *eigenbasis*, *eigenspace*

(v) Sei $v_1, \ldots, v_n$ Eigenbasis zu den Eigenwerten $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$.

5.1 Diagonalisierbarkeit

Definition 5.2. Ein Endomorphismus $f : V \to V$ heißt *diagonalisierbar*, wenn es eine Basis $v_1, \ldots, v_n$ gibt, so dass die darstellbare Matrix eine Diagonalmatrix ist – mit anderen Worten, wenn $v_1, \ldots, v_n$ eine Eigenbasis ist.

Bemerkung. Man sagt auch: Die Matrix $A \in M_{n\times n}(K)$ ist diagonalisierbar, wenn die zugehörige lineare Abbildung diagonalisierbar ist, d. h. es gibt eine invertierbare Matrix $S \in \mathrm{GL}_n(K)$ mit SAS^{-1} Diagonalmatrix.

Beispiel.

$$f : K^2 \to K^2, \qquad \text{Multiplikation mit } \left(\begin{smallmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{smallmatrix}\right)$$

$$\begin{pmatrix} 2x+y \\ 2y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \lambda\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda x \\ \lambda y \end{pmatrix}$$

$$2y = \lambda y \qquad \Rightarrow \underbrace{\lambda = 2}_{\substack{\Downarrow \\ 2x+y=2x \\ \Downarrow \\ y=0}} \quad \text{oder} \quad \underbrace{y = 0}_{\substack{\Downarrow \\ 2x=\lambda x \\ \Downarrow \\ x=0 \text{ oder } \lambda=2}}$$

Also: $y = 0$, $\lambda = 2$, x beliebig. f hat nur einen Eigenwert, nämlich 2. Eigenraum zur $\lambda = 2$:

$$v_2 = \left\{\begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix} : x \in K\right\}$$

Es gibt keine Eigenbasis.

5.2 Das charakteristische Polynom

Definition 5.3. Sei $f: V \to V$ linear und V ein endlich-dimensionaler Vektorraum. Dann heißt

$$\chi_f(T) = \det(f - T\,\mathrm{Id})$$

charakteristisches Polynom von f.

Bemerkung. Sei $v = \{v_1, \ldots, v_n\}$ Basis von V, $A = \left(a_{ij}\right)$ die darstellende Matrix von f.

$$\begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix} = \left(\delta_{ij}\right), \qquad \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \chi_f(T) &= \det\left(M_v^v(f - T\,\mathrm{Id})\right) \\ &= \det(A - T\,\mathrm{Id}) \\ &= \sum_{\sigma \in \mathrm{S}_n} \operatorname{sign}\sigma \left(a_{1\sigma(1)} - T\delta_{1\sigma(1)}\right)\left(a_{2\sigma(2)} - T\delta_{2\sigma(2)}\right)\cdots\left(a_{n\sigma(n)} - T\delta_{n\sigma(n)}\right) \end{aligned}$$

Dies ist ein Polynom in der Variablen T.

$\sigma = \mathrm{Id} \rightsquigarrow (-1)^n T^n$ ist der höchste Term:

$$\chi_f(T) = (-1)^n T^n + \text{Terme niedrigerer Ordnung}$$

Also hat $\chi_f(T)$ den Grad $n = \dim V$.

Satz 5.4. *Sei f Endomorphismus eines endlich-dimensionalen Vektorraums. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:*

(i) *λ ist ein Eigenwert von f.*

(ii) *λ ist Nullstelle von $\chi_f(T)$.*

Beweis. (i) $\Rightarrow$ (ii): Sei λ Eigenwert, d. h. $f(v) = \lambda v$, $v \neq 0 \Leftrightarrow (f - \lambda\,\mathrm{Id})(v) = 0$, $v \neq 0$

λ ist Eigenwert $\Leftrightarrow \ker(f - \lambda\,\mathrm{Id}) \neq 0 \Leftrightarrow \underbrace{\det(f - \lambda\,\mathrm{Id})}_{=\chi_f(\lambda)} = 0$ □

Beispiel. Betrachte $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ Drehung um α, d. h. Multiplikation mit $\left(\begin{smallmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{smallmatrix}\right)$. Gesucht sind die Eigenwerte.

$$\begin{aligned} \chi_f(T) &= \det\begin{pmatrix} \cos\alpha - T & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha - T \end{pmatrix} \\ &= (\cos\alpha - T)^2 + \sin^2\alpha \\ &= \cos^2\alpha - 2\cos\alpha T + T^2 + \sin^2\alpha \end{aligned}$$

$\chi_f(T) = 0$, d. h.

$$\begin{aligned} & (\cos\alpha - T)^2 + \sin^2\alpha = 0 \\ \Leftrightarrow \quad & (\cos\alpha - T)^2 = -\sin^2\alpha \\ \Leftrightarrow \quad & T = \cos\alpha \ \wedge\ \sin\alpha = 0 \end{aligned}$$

Für $\alpha \neq 0, 180\,^\circ$ ist $\sin\alpha = 0$, $\cos\alpha = 1, -1$, d. h. $\chi_f(T)$ hat die Nullstelle 1 bzw. -1, f hat den Eigenwert 1 bzw. -1.

Was sind die Eigenvektoren?

$$\alpha = 0\,^\circ: \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 1 \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

erfüllt für alle $\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) \in \mathbb{R}^2$.

$$\alpha = 180\,^\circ: \quad \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = (-1) \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

erfüllt für alle $\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) \in \mathbb{R}^2$.

5.3 Exkurs Eigenschaften von Polynomringen

Definition 5.5. Sei K ein Körper. Ein formaler Ausdruck der Form

$$P(T) = a_0 + a_1 T + a_2 T^2 + \ldots + a_n T^n, \qquad a_i \in K,\ a_n \neq 0 \qquad \text{oder } P(T) = 0$$

heißt *Polynom vom Grad n.*

$$K[T] = \text{Menge aller Polynome über } K$$

(Pedantisch: Ein Polynom ist eine Folge $(a_0, a_1, a_2, \ldots)$, $a_i \in K$ mit $a_i = 0$ für $i \gg 0$.)

Bemerkung (Nachtrag). Fasse $P(T)$ als Abbildung auf:

$$P : K \to K, \qquad \lambda \mapsto P(\lambda) = a_0 + a_1\lambda +_2 \lambda^2 + \ldots + a_n\lambda^n$$

Fasse $P(T)$ als Abbildung auf:

$$P : \operatorname{End} V \to \operatorname{End} V, \qquad f \mapsto P(f) = a_0 \operatorname{Id} + a_1 f + a_2 f \circ f + \ldots + a_n f^n$$

Folgendes Diagramm ist kommutativ:

$$\begin{tikzcd} \operatorname{End} V \arrow[r, "P"] \arrow[d, "\substack{\text{Wahl}\\ \text{der Basis}\\ v_1,\ldots,v_n}"'] & \operatorname{End} V \arrow[d] \\ M_{n\times n}(K) \arrow[r, "P"'] & M_{n\times n}(K) \end{tikzcd}$$

Lemma 5.6. *$K[T]$ ist ein Ring*[1] *mit der Addition*

$$\left(a_0 + a_1 T^1 + \ldots + a_n T^n\right) + \left(b_0 + b_1 T^1 + \ldots + b_m T^m\right) = (a_0 + b_0) + (a_1 + b_1) T + \ldots$$

und der Multiplikation

$$\begin{aligned} &\left(a_0 + a_1 T^1 + \ldots + a_n T^n\right)\left(b_0 + b_1 T^1 + \ldots + b_m T^m\right) \\ &= a_0 b_0 + (a_0 b_1 + a_1 b_0) T + (a_0 b_2 + a_1 b_1 + a_2 b_1) T^2 + \ldots + a_m b_m T^{n+m} \\ &= \sum_{k=0}^{n+m} \left(\sum_{i+j=k} a_i b_j \right) T^k. \end{aligned}$$

Beweis.

$K[T]$ ist kommutativ bezüglich „+“:

- Assoziativität gilt, da „+“ in K assoziativ ist.
- Kommutativität gilt, da „+“ in K kommutativ ist.
- 0 ist neutrales Element in $K[T]$, da 0 neutrales Element in K.
- Inverses bezüglich „+“ für $a_0 + a_1 T + \ldots + a_n T^n$ ist $-a_0 - a_1 T - \ldots - a_n T^n$.

Bezüglich „·“ gilt:

- Zu zeigen:

$$\left.\begin{aligned} PQ &= QP \\ P(QR) &= (PQ)R \\ P(Q+R) &= PQ + PR \end{aligned}\right\} \text{Übungsaufgabe!}$$

[1] $K[T] = \{(a_0, a_1, a_2, \ldots) \in K^\infty : \text{Es gibt } n \text{ mit } a_i = 0 \text{ für } i \geq n.\}$

Eigenschaften der Mutliplikation auf Monomen:

$$T^i \cdot T^j = T^{i+j}$$

Die Ausdehnung auf beliebige Polynome benutzt gerade die Rechenregeln. □

Definition 5.7. Sei $P = a_0 + a_1 T + \ldots + a_n T^n \in K[T]$, $\lambda \in K$. Dann ist $P(\lambda) = a_0 + a_1\lambda + \ldots + a_n\lambda^n \in K$. λ heißt *Nullstelle* von P, falls $P(\lambda) = 0$. K heißt *algebraisch abgeschlossen*, wenn jedes nichtkonstante Polynom eine Nullstelle hat.

Beispiel. $\mathbb{Q}$ und $\mathbb{R}$ sind nicht algebraisch abgeschlossen: $T^2 + 1$ hat keine Nullstelle.

Auch $\mathbb{F}_2$ ist nicht algebraisch abgeschlossen, da $T^2 + T + 1$ keine Nullstelle hat.

$\mathbb{C}$ ist algebraisch abgeschlossen.[2]

Bemerkung. Jeder Körper K ist in einem algebraisch abgeschlossenen Körper $\bar{K}$ enthalten.[3]

Beispiel. Körper der algebraischen Zahlen:

$$\bar{\mathbb{Q}} = \{\alpha \in \mathbb{C} : \alpha \text{ ist Nullstelle eines } P \in \mathbb{Q}[T]\}$$

Vorsicht! Weshalb ist das ein Körper?

Satz 5.8. *Sei $P \in K[T]$. Dann gilt:*

$$P = (T - \alpha_1)^{\nu_1} (T - \alpha_2)^{\nu_2} \cdots (T - \alpha_n)^{\nu_n} \cdot C$$

mit $\alpha_i \in K$ paarweise verschieden, $\nu_i \geq 1$, $n \geq 0$, $C \in K[T]$ ohne Nullstellen. Ist K algebraisch abeschlossen, so gilt $C = \text{const.}$, $C \in K$.

Bemerkung. Für $P = \chi_f$ sind die α_i gerade die Eigenwerte von f.

Beweis. *Induktion nach $\deg P$:*

- $\deg P = 0 \Rightarrow P = C = \text{const.}$ ✓

  $\deg P = 1$, $P = a_0 + a_1 T \overset{(a_1 \neq 0)}{=} a_1 \left(T + \frac{a_0}{a_1}\right)$, $a_1 = C$, $\alpha_1 = -\frac{a_0}{a_1}$, $\nu = 1$ ✓
- Der Satz sei bewiesen für alle Polynome vom Grad $\leq n$. Sei $F \in K[T]$ vom Grad $n+1$.

  Erster Fall: F hat keine Nullstelle. Dann ist $F = C$. Es ist nichts zu zeigen.

  Zweiter Fall: F hat eine Nullstelle $\alpha \in K$. Polynomdivision von F durch $(T - \alpha)$ ergibt: $F = Q(T - \alpha) + R$

  $$\deg R < \deg(T - \alpha) = 1$$

  Einsetzen von α:

  $$\underbrace{F(\alpha)}_{=0} = \underbrace{(\alpha - \alpha)}_{=0} Q(\alpha) + R = R$$

  Also:

  $$F = (T - \alpha) Q, \qquad \deg Q = \deg F - 1 = n$$

  Q kann nach Induktionsvoraussetzung als Produkt von Linearfaktoren mal C geschrieben werden, also auch: $F = (T - \alpha) Q$ □

Bemerkung. K algebraisch abgeschlossen $\Rightarrow \chi_f$ hat eine Nullstelle, d. h. f hat einen Eigenwert. Hat V eine Eigenbasis? Nein!

Beispiel. Betrachte $\left(\begin{smallmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{smallmatrix}\right)$:

$$\chi_f(T) = (2 - T)^2$$

Aber:

$$V_2 = \{\left(\begin{smallmatrix} x \\ 0 \end{smallmatrix}\right) : x \in K\} \qquad (\dim V_2 = 1)$$

[2] Beweis in Funktionentheorie oder Algebra I.
[3] Beweis in Algebra I benutzt Zornsches Lemma.

Definition 5.9. Sei $f : V \to V$ Endomorphismus eines endlich-dimensionalen Vektorraums, λ Eigenwert von f. Dann heißt $\dim V_\lambda$ *geometrische Multiplizität*. Die Multiplizität von λ in χ_f heißt *algebraische Vielfachheit*.

Satz 5.10. *Sei V ein endlich-dimensionaler Vektorraum, $f : V \to V$ Endomorphismus. Seien $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ die Eigenwerte von f mit geometrischer Vielfachheit μ_i und algebraischer Vielfachheit ν_i. Dann gilt*

$$\mu_i \leq \nu_i, \qquad i = 1, \ldots, n.$$

Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

(i) *Das charakteristische Polynom χ_f zerfällt in Linearfaktoren. $\mu_i = \nu_i$ für $i = 1, \ldots, n$.*

(ii) *V hat eine Eigenbasis bezüglich f.*

(iii) *Es gilt $V \cong V_{\lambda_1} \oplus \ldots \oplus V_{\lambda_n}$.*

Beweis. Sei λ Eigenwert, $v_1, \ldots, v_k$ Basis von V_λ. Ergänze zu einer Basis $v_1, \ldots, v_N$ von V. Berechne χ_f in der Basis $v_1, \ldots, v_N$: Matrix von f bezüglich dieser Basis:

$$\left.\begin{array}{r} f(v_1) = \lambda v_1 \\ f(v_2) = \lambda v_2 \\ f(v_k) = \lambda v_k \\ f(v_{k+1}) = ? \end{array}\right\} \Rightarrow M = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & \cdots & 0 & \\ 0 & \lambda & & \vdots & A \\ \vdots & & \ddots & \vdots & \\ 0 & \cdots & \cdots & \lambda & \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & \\ \vdots & & & \vdots & B \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & \end{pmatrix}$$

$$x_f(T) = \det(M - \lambda T) = \det(\lambda \operatorname{Id} - T \operatorname{Id}) \det B - T \operatorname{Id} = (\lambda - T)^k \det(B - T \operatorname{Id})$$

geometrische Vielfachheit $= \dim V_\lambda = k \leq$ algebraische Vielfachheit von λ

(i) $\Rightarrow$ (ii): Sei $v_1, \ldots, v_n$ eine Eigenbasis. Dann ist die darstellende Matrix von f bezüglich $v_1, \ldots, v_n$ eine Diagonalmatrix. Das charakteristische Polynom hat dann die Form

$$(\lambda_1 - T)^{\nu_1} (\lambda_2 - T)^{\nu_2} \cdots (\lambda_k - T)^{\nu_k},$$

wobei $\lambda_i - T$ gerade so oft auftritt, wie der Eigenvektor λ_i für $v_1, \ldots, v_n$.

Also: algebraische Vielfachheit $=$ geometrische Vielfachheit und χ_f zerfällt in Linearfaktoren.

(ii) $\Rightarrow$ (iii): Sei $\mu_i = \nu_i$ für alle Eigenwerte $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$. Wir betrachten

$$\begin{aligned} \varphi : V_{\lambda_1} \oplus V_{\lambda_2} \oplus \ldots \oplus V_{\lambda_n} &\to V \\ (v_1, v_2, \ldots, v_n) &\mapsto v_1 + v_2 + \ldots + v_n \end{aligned}$$

Diese Abbildung ist linear. Nach Voraussetzung gilt:

$$\dim\left(V_{\lambda_1} \oplus \ldots \oplus V_{\lambda_n}\right) = \sum_{i=1}^n \dim V_{\lambda_i} = \sum_{i=1}^n \mu_i \overset{\text{(i)}}{=} \sum_{i=1}^n \nu_i = \deg \chi_f,$$

da χ_f in Linearfaktoren zerfällt:

$$\chi_f(T) = (\lambda_1 - T)^{\nu_1} (\lambda_2 - T)^{\nu_2} \cdots (\lambda_n - T)^{\nu_n}$$

Also:

$$\deg \chi_f = \dim V,$$

d.h. beide Seiten haben dieselbe Dimension.

Behauptung: φ ist bijektiv. ($\Leftrightarrow \varphi$ injektiv)

Beweis. Zu zeigen: $v_i \in V_{\lambda_i}$ mit $v_1 + v_2 + \ldots + v_n = 0 \Rightarrow v_i = 0$

Angenommen $(v_1, \ldots, v_n) \in \ker \varphi \setminus \{0\}$. Sei s die Anzahl der i mit $v_i \neq 0$, also $s \geq 1$. O.B.d.A. ist $v_1, \ldots, v_s \neq 0$ und $v_{s+1} = \ldots = v_n = 0$. Sei s die kleinstmögliche Zahl mit dieser Eigenschaft.

$s=1$ bedeutet $\sum\limits_{i=1}^{1} v_i = 0$, also $v_1 = 0$. Widerspruch! Es gilt also $s > 1$. Also gibt es wenigstens zwei verschiedene Eigenwerte und es gibt einen Eigenwert ungleich Null, o. B. d. A. sei $\lambda_1 \neq 0$. Es gilt:

$$\begin{aligned} v_1 + v_2 + \ldots + v_s = 0 \quad \Rightarrow \quad 0 &= f(v_1) + f(v_2) + \ldots + f(v_s) \\ &= \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \ldots + \lambda_s v_s \\ &= v_1 + \frac{\lambda_2}{\lambda_1} v_2 + \ldots + \frac{\lambda_s}{\lambda_1} v_s \end{aligned}$$

Beide Gleichungen zusammen ergeben:

$$\underbrace{\left(1 - \frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right) v_2}_{\in V_{\lambda_2} \setminus \{0\}} + \underbrace{\left(1 - \frac{\lambda_3}{\lambda_1}\right) v_3}_{\in V_{\lambda_3} \setminus \{0\}} + \ldots + \underbrace{\left(1 - \frac{\lambda_s}{\lambda_1}\right) v_s}_{\in V_{\lambda_s} \setminus \{0\}} = 0$$

Dies ist ein Widerspruch zur Wahl von s. Also gilt: $\ker \varphi = 0$

Das Diagramm

$$\begin{tikzcd} V_{\lambda_1} \oplus \ldots \oplus V_{\lambda_n} \arrow[r, "\varphi", "\cong"'] \arrow[d, "h"'] & V \arrow[d, "f"] \\ V_{\lambda_1} \oplus \ldots \oplus V_{\lambda_n} \arrow[r, "\cong", "\varphi"'] & V \end{tikzcd} \qquad h : (v_1, \ldots, v_n) \mapsto (\lambda_1 v_1, \ldots, \lambda_n v_n)$$

ist kommutativ.

$$\left.\begin{array}{l} \text{Sei } v_1^1, \ldots, v_{\mu_1}^1 \text{ Basis von } V_{\lambda_1}. \\ \text{Sei } v_1^2, \ldots, v_{\mu_1}^2 \text{ Basis von } V_{\lambda_2}. \\ \qquad \vdots \\ \text{Sei } v_1^n, \ldots, v_{\mu_1}^n \text{ Basis von } V_{\lambda_n}. \end{array}\right\} \text{Basis von V nach (iii)}$$

Dies ist die gesuchte Eigenbasis. □

Korollar 5.11. *Sei $f : V \to V$ Endomorphismus eines n-dimensionalen Vektorraums. f habe n verschiedene Eigenwerte, d. h. χ_f hat n verschiedene Nullstellen. Dann ist f diagonalisierbar (es existiert eine Eigenbasis).*

Beweis. Nach Definition ist $\mu_i \geq 1$ und nach Voraussetzung ist $\nu_i = 1 \leq \mu_i \overset{5.10}{\leq} \nu_i$. Also gilt $\mu_i = \nu_i$ für $i = 1, \ldots, n$. (i) ⇒ (ii) besagt, dass es eine Eigenbasis gibt. □

Bemerkung. In der Physik nennt man Eigenräume mit geometrischer Vielfachheit größer 1 *degeneriert*. Durch kleine Störungen wird die Matrix nichtdegeneriert. Über $\mathbb{C}$ ist jede nichtdegenerierte Matrix diagonalisierbar.

Satz 5.12. *Sei K algebraisch abgeschlossen, V endlich-dimensional und $f : V \to V$ Endomorphismus. Dann gibt es eine Basis von V,so dass die darstellende Matrix von f bezüglich dieser Basis eine Dreiecksmatrix ist.*

Beispiel. K^n mit der Standardbasis, $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & 1 \end{pmatrix}$.

Die Unterräume $\langle e_1, \ldots, e_i \rangle$ werden von f in sich abgebildet.

5.4 Fahnen

Definition 5.13. Sei V ein Vektorraum. Eine *Fahne* der Länge r von V ist eine echt aufsteigende Folge von Untervektorräumen:

$$V_0 \subsetneq V_1 \subsetneq V_2 \subsetneq \ldots \subsetneq V_r$$

Die Fahne heißt *vollständig*, wenn

(i) $V_0 = 0$,

(ii) $V_r = V$,

(iii) $\dim V_{i+1} = \dim V_i + 1$.

Sei f ein Endomorphismus. Ein Untervektorraum $U \subset V$ heißt *f-invariant* oder *stabil unter f*, falls $f(U) \subset U$. Eine Fahne heißt *f-invariant*, falls alle V_i f-invariant sind.

Beispiel.

a) $0 \subset V$ ist eine f-invariante Fahne, vollständig genau dann, wenn $\dim V = 1$.

b) $V_\lambda \subset V$ ist f-invariant, denn $f(v) = \lambda v \in V_\lambda$, $v \in V_\lambda$.

c) $v_1, \ldots, v_n$ Basis von V. $V_i = \langle v_1, \ldots, v_i \rangle$. Die V_i bilden eine vollständige Fahne.

d) Gegeben eine vollständige, f-invariante Fahne V_i. $\dim V_1 = 1$, $v \neq 0$ in V_1. $f(v) \in V_1 \Rightarrow f(v) = \lambda v$ für ein $\lambda \in K$ Eigenvektor.

Satz 5.14. *Sei K algebraisch abgeschlossen, V endlich-dimensionaler K-Vektorraum, $f : V \to V$ Endomorphismus. Dann existiert eine vollständige f-invariante Fahne.*

Beweis. *Induktion nach* $\dim V$. Ist $\dim V = 0$, ist nichts zu zeigen.

Sei nun $n = \dim V > 0$. $V_0 = 0$. Sei v ein Eigenvektor zum Eigenwert λ, $V_1 = \langle v \rangle$.
Dann gilt $f(\mu v) = \lambda \mu v \in V_1$.

Sei $V' = V/V_1 = \{v + V_1 : v \in V\}$, $\varrho : V \to V', v \mapsto v + V_1$.

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{f} & V \\ \varrho\downarrow & & \downarrow\varrho \\ V' & \xrightarrow[f']{} & V' \end{array}$$

Setze $f' : V' \to V', v + V_1 \mapsto f(v) + V_1$.

f' ist linear:

$$\begin{aligned} f'((v + V_1) + (w + V_1)) &= f'(v + w + V_1) \\ &= f(v + w) + V_1 \\ &= f(v) + f(w) + V_1 \\ &= (f(v) + V_1) + (f(w) + V_1) \\ &= f'(v + V_1) + f(w + V_1) \end{aligned}$$

Wohldefiniertheit von f':

$$v + V_1 = w + V_1$$

Zu zeigen: $f(v) + V_1 = f(w) + V_1$.
$\Leftrightarrow v - w \in V_1$.
$\Rightarrow f(v) - f(w) = f(v - w) = \lambda v - w \in V_1$
$\Leftrightarrow f(v) + V_1 = f(w) + V_1$.

Es gilt $\dim V' = \dim V - \dim V_1 = n - 1$. Wir wenden die Induktionsvoraussetzung auf $f' : V' \to V'$ an. Also existiert eine vollständige Fahne f'-invariante Fahne in V':

$$0 \subset V_1' \subset V_2' \subset V_3' \subset \ldots \subset V_n' = V'$$
$$f'(V_i') \subset V_i', \qquad \dim V_i' = i - 1$$

Sei $V_i = \varrho^{-1}(V_i')$.
$\varrho^{-1}(V_1') = \varrho^{-1}(0) = V_1$.
$\Rightarrow 0 = V_0 \subset V_1 \subset V_2 \subset \ldots \subset V_n$
$V_n = \varrho^{-1}(V_n') = \varrho^{-1}(V') = V$, da $\varrho : V \to V' = V/V_1$.

Behauptung: $\dim V_i = i$. Für $i = 0$ richtig.

Sei nun $i > 0$. $\varrho : V \to V'$ ist surjektiv. $\Rightarrow \varrho|_{V_i} : V_i \to V_i'$ ist surjektiv.
Dimensionsformel: $\dim V_i = \dim \operatorname{im} \varrho|_{V_i} + \dim \ker \varrho|_{V_i} = \dim V_i' + \dim V_1 = i - 1 + 1 = i$.

Behauptung: $f(V_i) \subset V_i$

Sei $v \in V_i$, d. h. $\underbrace{\varrho(v)}_{=v+V_1} \in V_i'$. Nach Voraussetzung: $f'\left(V_i'\right) \subset V_i'$, also $\underbrace{f'(v+V_1)}_{\substack{=f(v)+V_1\\=\varrho(f(v))}} \subset V_i'$.

Gezeigt: $v \in V_i \Rightarrow f(v) \in \varrho^{-1}\left(V_i'\right) = V_i$ □

Beweis (Zu Satz 5.12). Sei $0 \subset V_1 \subset V_2 \subset \ldots \subset V_n = V$ eine vollständige f-invariante Fahne. Sei v_1 eine Basis von V_1. Sei $\{v_1, v_2\}$ eine Basis von V_2 (Basisergänzungssatz). Sei $\{v_1, v_2, v_3\}$ eine Basis von V_3 usw.

Also: $v_1, \ldots, v_n$ Basis von V, so dass $V_i = \langle v_1, \ldots, v_i \rangle$. Beachte: $f(\langle v_1, \ldots, v_i \rangle) \subset \langle v_1, \ldots, v_i \rangle$.

Die darstellende Matrix von f bezüglich $v_1, \ldots, v_n$ ist

$$\begin{pmatrix} \lambda & \alpha & * & \cdots & * \\ 0 & \beta & * & & \vdots \\ 0 & 0 & * & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & * \end{pmatrix} \qquad \begin{array}{ll} f(v_1) \in V_1 = \langle v_1 \rangle, & \text{d. h. } f(v_1) = \lambda v_1 + 0 v_2 + \ldots \\ f(v_2) \in V_1 = \langle v_1, v_2 \rangle, & \text{d. h. } f(v_1) = \alpha v_1 + \beta v_2 + \ldots \end{array}$$

wie behauptet. □

Beispiel. $f : K^2 \to K^2$ Multiplikation mit $\left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 3 \end{smallmatrix}\right)$. Gesucht: $0 = V_0 \subset V_1 \subset V_2 = V$ mit $f(v_1) \subset V_1$.

$$\chi_f(T) = \det \begin{pmatrix} 1-T & 1 \\ -1 & 3-T \end{pmatrix} = (1-T)(3-T) + 1 = T^2 - 4T + 4 = (T-2)^2 \quad \Rightarrow \text{ Eigenwert } 2.$$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-2 & 1 \\ -1 & 3-2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x+y \\ -x+y \end{pmatrix} \quad \Rightarrow y = x$$

$v_1 = \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$ ist ein Eigenvektor.

Wähle $v_2 = \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$.

$f(v_1) = 2v_1$
$f(v_2) = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 3 \end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 3 \end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right) + \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 2 \end{smallmatrix}\right) = v_1 + 2v_2$

Darstellende Matrix ist $\left(\begin{smallmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{smallmatrix}\right)$.

$$(T-2)^2 = \left(\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\right)^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Sei $f : V \to V$ Endomorphismus, $P(T) \in K[T]$ Polynom:

$$P(T) = a_0 + a_1 T + a_2 T^2 + \ldots + a_n T^n, \qquad a_i \in K$$

Dann ist

$$P(f) = a_0 \operatorname{Id} + a_1 f + a_2 f^2 + \ldots + a_n f^n \in \operatorname{End}(V), \qquad f^i = \underbrace{f \circ f \circ \cdots \circ f}_{i \text{ mal}}.$$

Satz 5.15 (Cayley-Hamilton). *Sei K ein Körper, V ein endlich-dimensionaler K-Vektorraum und $f : V \to V$ ein Endomorphismus. Dann gilt:*

$$\chi_f(f) = 0 \in \operatorname{End}(V)$$

Beweis. Sei zunächst K algebraisch abgeschlossen. Wir wählen eine Basis von V, so dass

$$M_v^v(f) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \cdots & * \\ & \ddots & \vdots \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} =: M$$

Es gilt $\chi_f(T) = \det(M - T \operatorname{Id}) = (\lambda_1 - T)(\lambda_2 - T) \cdots (\lambda_n - T)$.
Also: $\chi_f(f) = (\lambda_1 \operatorname{Id} - f) \circ (\lambda_2 \operatorname{Id} - f) \circ \cdots \circ (\lambda_n \operatorname{Id} - f)$

Sei $\phi_i = (\lambda_1 - f \operatorname{Id})(\lambda_2 - f \operatorname{Id}) \cdots (\lambda_n - f \operatorname{Id})$.

Sei $0 = V_0 \subset V_1 \subset \ldots \subset V_n$ die vollständige f-invariante Fahne, die zur Definition von M führte.

Behauptung: $\phi_i(V_i) = 0$. (Insbesondere: $i = n \Rightarrow \phi_n = \chi_f(f)$, $V_n = V$, d. h. $\chi_f(f)(V) = 0$.)

Induktion nach i:

Für $i = 0$ ist nichts zu zeigen, denn $\phi_0(v) = 0$

Sei nun $i > 0$. $\phi_i = \phi_{i-1}(\lambda_i - f)$. Sei nun $v \in V_i$. $v = a_1 v_1 + \ldots + a_i v_i$.

$$\begin{aligned}
\phi_i(v) &= \phi_{i-1}\left((\lambda_i - f)(a_1 v_1 + a_2 v_2 + \ldots + a_i v_i)\right) \\
&= \phi_{i-1}\left(\lambda_i a_1 v_1 + \lambda_i a_2 v_2 + \ldots + \lambda_i a_i v_i - a_1 \underbrace{f(v_1)}_{\in V_{i-1}} - a_2 \underbrace{f(v_2)}_{\in V_{i-1}} - \ldots - a_i f(v_i)\right) \\
&= \phi_{i-1}(\lambda_i a_i v_i - a_i \lambda_i v_i) + v \qquad \text{mit } v \in V_{i-1} \\
&= 0 \qquad \text{nach Induktionsvoraussetzung}
\end{aligned}$$

$f(v_i) = ?v_1 + ?v_2 + \ldots + ?v_{i-1} + \lambda_i v_i + 0 = \lambda_1 v_1 + \text{Rest}$ mit Rest $\in V_{i-1}$. Alle Summanden, außer $\lambda_i a_i v_i$ und $a_i f(v_i)$ liegen in V_{i-1}.

Sei nun K beliebig. Sei $v_1, \ldots, v_n$ eine Basis von V, M die darstellende Matrix von f.

$$\chi_M(T) = \chi_f(T)$$

Dann ist $\chi_m(M)$ die darstellende Matrix von $\chi_f(f)$.

Zu zeigen: $\chi_M(M) = 0$ in $M_n(K) \subset M_n(\bar{K})$ (In Algebra I: $K \subset \bar{K}$ für $\bar{K}$ algebraisch abgeschlossen.)

$M : \bar{K}^n \to \bar{K}^n$ ist lineare Abbildung. Nach dem bisher Gezeigten gilt $\chi_M(M) = 0$. □

Beispiel. $\left(\begin{smallmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{smallmatrix}\right)$, $v_1 = \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$, $v_2 = \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$.

$\phi_1 = (2 - f)$, $\phi_2 = (2 - f)^2$.

$\phi_1\left(\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)\right) = \left(\left(\begin{smallmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{smallmatrix}\right) - \left(\begin{smallmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{smallmatrix}\right)\right)\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$

$\phi_1(2 - f)\left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \end{smallmatrix}\right) = \phi_1\left(\left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)\right) = \phi_1\left(\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)\right) = 0$

5.5 Das Minimalpolynom

21.04.

Definition 5.16. Sei V ein endlich-dimensionaler Vektorraum, $f : V \to V$ ein Endomorphismus. Das *Minimalpolynom* $\mu_f \in K[T]$ ist das kleinste (kleinster Grad) normierte Polynom ungleich 0 mit $\mu_f(f) = 0$.

$P \in K[T]$ heißt *normiert*, falls

$$P(T) = T^d + a_{d-1}T^{d-1} + \ldots + a_0, \qquad a_i \in K$$

Lemma 5.17. *Sei $P \in K[T]$ mit $P(f) = 0$. Dann ist μ_f ein Teiler von P. μ_f ist eindeutig bestimmt.*

Beweis. Polynomdivision mit Rest ergibt:

$$P = Q\mu_f + R, \qquad Q, R \in K[T],\ \deg R < \deg \mu_f$$

$$0 = P(f) = Q(f)\underbrace{\mu_f(f)}_{=0} + R(f) \qquad \Rightarrow R \text{ hat Nullstelle } f.$$

$$R = b_m T^m + b_{m-1}T^{m-1} + \ldots + b_0, \qquad b_m \neq 0$$
$$\rightsquigarrow {b_m}^{-1} R(f) = 0$$

Nach Wahl des Minimalpolynoms muss $R = 0$ sein. Die Division $P = Q\mu_f$ liefert keinen Rest.

Sei μ'_f ebenfalls Minimpolynom. Es gilt:

$$\mu'_f = P_1 \mu f \text{ und } \mu_f = P_2 \mu'_f = P_2 P_1 \mu_f \qquad \Rightarrow \deg P_2 P_1 = 0 \qquad \Rightarrow \deg P_1, \deg P_2 = 0$$

d. h. $P_1, P_2 \in K$, $P_1 P_2 = 1$.

$$T^d + a_{d-1} + \ldots = (P_2 P_1)\left[T^d + a_{d-1}T^{d-1} + \ldots\right]$$

Koeffizientenvergleich in $\mu_f = P_2 \mu'_f$ ergibt $P_2 = 1$, da μ_f, μ'_f normiert sind. □

Beispiel. $A = \left(\begin{smallmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{smallmatrix}\right)$, $\chi_A(T) = (a-T)(b-T) = T^2 - (a+b)T + ab$

$$\chi_A(A) = \begin{pmatrix} a^2 & 0 \\ 0 & b^2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a^2+ab & 0 \\ 0 & ab+b^2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} ab & 0 \\ 0 & ab \end{pmatrix} = 0$$

Mögliche Teiler: $T-a$, $T-b$

$$(T-a)\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a-a & 0 \\ 0 & -a+b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & b-a \end{pmatrix}$$

Für $a = b$ ist $\mu_A = T - a$.
Für $a \neq b$ ist $\mu_A = \chi_A$.

Beispiel. $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, $\chi_B(T) = (T-2)^2$. Möglicher Teiler: $T-2$

$$(T-2)(B) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \neq 0$$

Also: $\mu_B = \chi_B$.

Satz 5.18. *μ_f teilt χ_f. Die Nullstellen von μ_f und χ_f stimmen überein.*

Beweis. $\chi_f = Q\mu_f$ (nach 5.17 und Caley-Hamilton). Insbesondere sind die Nullstellen von μ_f auch Nullstellen von χ_f.

Sei λ Nullstelle von χ_f, also Eigenwert zu einem Eigenvektor v.

$$f(v) = \lambda(v), \qquad f^2(v) = f(\lambda v) = \lambda f(v) = \lambda^2 v, \qquad \ldots, \qquad f^n(v) = \lambda^n v$$

$$P = a_n T^n + a_{n-1}T^{n-1} + \ldots + a_0$$

$$\underbrace{P(f)}_{V\to V}(v) = (a_n f^n + a_{n-1} f1n - 1 + \ldots + a_0)(v) = \underbrace{\left(a_n\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \ldots + a_0\right)}_{\substack{\in K \\ = P(\lambda)v}}(v)$$

Insbesondere: $\mu_f(f)(v) = \mu_f(\lambda)\underbrace{v}_{\neq 0} = 0$, da $\mu_f(f) = 0$ in $\operatorname{End} V$. $\Rightarrow \mu_f(\lambda) = 0$. □

Satz 5.19. *Sei $f : V \to V$ Endomorphismus eines endlich-dimensionalen Vektorraums V. Dann ist f genau dann diagonalisierbar, wenn μ_f in Linearfaktoren zerfällt und die Nullstellen von μ_f die Multiplizität 1 haben.*

Beweis. Sei $v_1, \ldots, v_n$ eine Eigenbasis von V. Dann zerfällt χ_f und damit auch μ_f in Linearfaktoren. Sei

$$\mu_f(T) = (T-\lambda_1)^{\nu_1}(T-\lambda_2)^{\nu_2}\cdots(T-\lambda_k)^{\nu_k}, \qquad \nu_k \geq 1$$

$\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ sind die Eigenwerte von f.

$\tilde{\mu}_f(T) = (T-\lambda_1)(T-\lambda_2)\cdots(T-\lambda_k)$

Behauptung: $\tilde{\mu}_f(f) = 0$ in $\operatorname{End} V$.

$$\begin{aligned} \tilde{\mu}_f(f)(v_i) &= \tilde{\mu}_f(\lambda)\, v_i, \qquad \lambda \text{ der Eigenwert zum Eigenvektor } v_i;\ \lambda = \lambda_j \text{ für ein } j. \\ &= (\lambda_j = \lambda_1)(\lambda_j - \lambda_2)\cdots(\lambda_j - \lambda_k)\, v_i = 0, \qquad \text{da } (\lambda_j - \lambda_j) = 0 \end{aligned}$$

$\tilde{\mu}_f(f)$ verschwindet auf allen Elementen einer Basis, also gilt $\tilde{\mu}_f(f) = 0$. Wegen $\deg \tilde{\mu}_f \leq \mu_f$ und der Definition des Minimalpolynoms folgt $\tilde{\mu}_f = \mu_f$.

Rückrichtung: Sei umgekehrt $\mu_f(T) = (T-\lambda_1)\cdots(T-\lambda_k)$ mit $\lambda_i \neq \lambda_j$ für $i \neq j$.

Behauptung: f ist diagonalisierbar.

Vollständige Induktion nach $\dim V$*:* $\dim V = 1$ ist klar.

Wir betrachten $f - \lambda_1 \operatorname{Id} : V \to V$. Seien $K = \ker(f - \lambda_1 \operatorname{Id}) = \underbrace{V_{\lambda_1} \neq 0}_{\substack{\text{da } \lambda_1 \\ \text{Eigenwert}}}$, $B = \operatorname{im}(f - \lambda_1 \operatorname{Id})$.

$f(K) \subset K$. Jede Basis von K ist eine Eigenbasis.

$f(B) \overset{?}{\subset} B$

$v \in B$, $v = (f-\lambda_1)w$ für ein $w \in V$. $f(v) = f(f-\lambda_1)(w) = (f-\lambda_1)f(w)$, d. h. $f(v) \in B$
$\Rightarrow f(B) \subset B$.

Dimensionsformel: $\underbrace{\dim B}_{\mathrm{rk}(f-\lambda_1)} = \dim V - \underbrace{\dim K}_{\neq 0} < \dim V$

Es gilt $\mu_f\left(f|_B\right)(B) \subset \mu_f(f) \in V = 0$. Das Minimalpolynom von $f|_B$ ist also ein Teiler von μ_f. Also ist auch $\mu_{f|_B}$ Produkt von einfachen Linearfaktoren.

Nach Induktionsvoraussetzung ist nun $f|_B$ diagonalisierbar, d. h. B hat eine Eigenbasis bezüglich $f|_B$ bzw. f.

Zu zeigen bleibt: ***Behauptung:*** $K \oplus B \cong V$, $(v, w) \mapsto v + w$

Trick: Division mit Rest: $(T-\lambda_2)(T-\lambda_3)\cdots(T-\lambda_k) = Q(T-\lambda_1) + C$, $\deg C < \deg(T-\lambda_1) = 1$, also $C \in K$ konstant. $c = 0$ ist unmöglich, denn $T\lambda_1$ ist *kein* Teiler der linken Seite. Also $C \in K^* = K \setminus \{0\}$. Wir lesen die Gleichung anders, nämlich als

$$C^{-1}(T-\lambda_2)(T-\lambda_3)\cdots(T-\lambda_k) - C^{-1}Q(T-\lambda_1) = 1$$

Setze f ein, wende auf $v \in V$ an:

$$1 \cdot v = \underbrace{C^{-1}(f-\lambda_2)(f-\lambda_3)\cdots(f-\lambda_k)(v)}_{\substack{\in K \\ \text{denn } (f-\lambda_1)\, C^{-1}(f-\lambda_2)\cdots(f-\lambda_k)(v) \\ = C^{-1}\mu_f(f)(v) = 0}} - \underbrace{C^{-1}Q(f-\lambda_1)}_{(f-\lambda_1)\left(C^{-1}Q(f)(v)\right) \in B}(v),$$

d. h. $K \oplus B \to V$ ist surjektiv. $\square$

5.6 Jordansche Normalform

Sei K algebraisch abgeschlossen, V endlich-dimensional, $f: V \to V$ Endomorphismus. Dann gibt es eine Basis von V, so dass die darstellende Matrix die Form

$$\begin{pmatrix} J_1 & & 0 \\ & J_2 & \\ 0 & & \ddots \end{pmatrix} \qquad \text{mit } J_i = \begin{pmatrix} \lambda_i & 1 & & 0 \\ & \lambda_i & 1 & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & \lambda_i \end{pmatrix}$$

hat. Die J_i sind bis auf Reihenfolge eindeutig.

f ist diagonalisierbar $\Leftrightarrow J_i = \left(\lambda_i\right)$ für alle i

6 Euklidische und unitäre Vektorräume

27.04.

Diesem Abschnitt werden jeweils die Körper $K = \mathbb{R}$ bzw. $K = \mathbb{C}$ zugrunde gelegt. Zur Abkürzung steht deshalb $\mathbb{K}$.

6.1 Skalarprodukte, Normen, Metriken

Definition 6.1. Sei V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum. Eine Abbbildung

$$s : V \times V \to \mathbb{K}$$

heißt *Bilinearform* ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$) bzw. *Sesquilinearform* ($\mathbb{K} = \mathbb{C}$), wenn

(i) $s(v, \lambda_1 w_1 + \lambda_2 w_2) = \lambda_1 s(v, w_1) + \lambda_2 s(v, w_2)$ für alle $\lambda_i \in \mathbb{K}$, $v, w_i \in V$.

(ii) $s(\mu_1 v_1 + \mu_2 v_2, w) = \overline{\mu_1} s(v_1, w) + \overline{\mu_2} s(v_2, w)$ für alle $\mu_i \in \mathbb{K}$, $v_i, w \in V$.

s heißt *symmetrisch* bzw. *hermitesch*, falls zusätzlich

(iii) $s(v, w) = \overline{s(w, v)}$.

s heißt *Skalarprodukt*, falls s zusätzlich *positiv definit* ist, d. h.

(iv) $s(v, v) \geq 0$ für alle $v \in V$ und $s(v, v) = 0$ nur für $v = 0$.
($\Leftrightarrow s(v, v) > 0$ für $v \in V \setminus \{0\}$)

Das Paar (V, s) heißt *euklidischer* bzw. *unitärer* Vektorraum. Meist schreibt man V statt (V, s).

Bemerkung. Es gilt $s(v, v) \overset{\text{(iii)}}{=} \overline{s(v, v)} \in \mathbb{R}$ auch für $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

Beispiel. $V = \mathbb{R}^n$: $s(v, w) = v^t w = (a_1, \ldots, a_n) \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = a_1 b_1 + \ldots + a_n b_n$,

$v = (a_1, \ldots, a_n)^t$, $w = (b_1, \ldots, b_n)^t$

Bilinear. ✓
Symmetrisch. ✓
Positiv definit: $s(v, v) = {a_1}^2 + \ldots + {a_n}^2 \geq 0$. $s(v, v) = 0 \Leftrightarrow a_1 = 0, \ldots, a_n = 0$. ✓

Dies ist das Standardskalarprodukt auf $\mathbb{R}^n$.

Beispiel. $V = \mathbb{C}^n$: $s(v, w) = \bar{v}^t w = \overline{a_1} b_1 + \ldots + \overline{a_n} b_n$

$s(w, v) = \bar{w}^t v = vt\bar{w} = \overline{\bar{v}^t w} = s(v, w)$.

$s(v, v) = \overline{a_1} a_1 + \ldots + \overline{a_n} a_n = |a_1|^2 + \ldots + |a_n|^2 \geq 0$

$s(v, v) = 0 \Leftrightarrow |a_1| = \ldots = |a_n| = 0 \Leftrightarrow a_1 = \ldots = a_n = 0$

Bemerkung.

- Für (iv) muss „>“ auf dem Körper definiert sein $\Rightarrow K = \mathbb{R}$ (mit einem Trick auch $K = \mathbb{C}$ möglich).
- (i) besagt, dass s linear ist als Abbildung in der zweiten Variablen. Für $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ ist s nicht linear in der ersten Variablen. Die Rollen kann man vertauschen. Beide Konventionen kommen vor.

Beispiel.

$$V = \{f : [0, 1] \to \mathbb{K} : f \text{ stetig}\}$$

$$s(f, g) = \langle f, g \rangle = \int_0^1 \bar{f} g \, \mathrm{d}t \qquad \text{ist ein Skalarprodukt}$$

Positiv definit: $\langle f, f \rangle = \int_0^1 \bar{f} f \, \mathrm{d}t = \int_0^1 |f|^2 \, \mathrm{d}t \geq 0$
$\langle f, f \rangle = 0 \Leftrightarrow f = 0$, da f stetig.

Beispiel.

$$\langle , \rangle : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2, \qquad \left\langle \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} \right\rangle = 2a_1b_1 + a_2b_2 \qquad \text{ist ein Skalarprodukt}$$

Hingegen $-2a_1b_1 + a_2b_2$ ist nicht positiv definit.

Definition 6.2. Sei V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum. Eine Abbildung

$$\|.\| : V \to \mathbb{R}$$

heißt *Norm*, falls für alle $v, w \in V$, $\lambda \in \mathbb{K}$ gilt:

(i) $\|\lambda v\| = |\lambda| \, \|v\|$.

(ii) $\|v + w\| \leq \|v\| + \|w\|$ (Dreiecksungleichung).

(iii) $\|v\| \geq 0$ und $\|v\| = 0$ nur für $v = 0$.

Eine Abbildung

$$d : V \times V \to \mathbb{R}$$

heißt *Metrik*, falls

(i) $d(x, y) = d(y, x)$ (Symmetrie).

(ii) $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ (Dreiecksungleichung).

(iii) $d(x, y) \geq 0$ und $d(x, y) = 0$ nur für $x = y$.

Bemerkung.

$$\begin{array}{lll} \text{Skalarprodukt} & \Rightarrow \text{Norm} & \Rightarrow \text{Metrik} \\ & \|v\| = \sqrt{\langle v,\ v \rangle} & d(x, y) = \|x - y\| \\ & \not\Leftarrow & \not\Leftarrow \end{array}$$

Lemma 6.3. *Sei V euklidischer bzw. unitärer Vektorraum. Dann ist $\|v\| = \sqrt{\langle v,\ v \rangle}$ eine Norm auf V.*[1]

Beweis. Wegen $\langle v,\ v \rangle \geq 0$ ist $\|v\|$ wohldefiniert. Zu zeigen sind die drei definierenden Eigenschaften einer Norm:

Zu (i):

$$\begin{aligned} \|\lambda v\| &= \sqrt{\langle \lambda v,\ \lambda v \rangle} = \sqrt{\lambda \bar{\lambda} \langle v,\ v \rangle} \qquad \text{(nach den Eigenschaften (i) und (ii) des Skalarprodukts)} \\ &= \sqrt{|\lambda|^2} \sqrt{\langle v,\ v \rangle} = |\lambda| \, \|v\| \end{aligned}$$

Zu (iii): $\sqrt{\langle v,\ v \rangle} \geq 0$, $\|v\| = 0 \Leftrightarrow \langle v,\ v \rangle = 0 \overset{\text{(iv)}}{\Longleftrightarrow} v = 0$, da $\langle ,\ \rangle$ positiv definit.

Behauptung: Cauchy-Schwarzsche Ungleichung: $|\langle v,\ w \rangle| \leq \|v\| \cdot \|w\|$

Beweis. 1. Fall: $w = 0$. Dann steht: $0 \leq 0$

2. Fall: $w \neq 0 \Rightarrow \|w\| \neq 0$.

$$0 \leq \langle v - \lambda w,\ v - \lambda w \rangle = \langle v,\ v \rangle - \lambda \langle v,\ w \rangle - \bar{\lambda} \underbrace{\langle w,\ v \rangle}_{=\overline{\langle v,\ w \rangle}} + \bar{\lambda} \lambda \langle w,\ w \rangle$$

$$= \|v\|^2 - \lambda \langle v, w \rangle - \bar{\lambda} \overline{\langle v, w \rangle} + |\lambda|^2 \|w\|^2$$

Sei $\lambda := \frac{\overline{\langle v, w \rangle}}{\|w\|^2}$. Dann folgt weiter:

$$= \|v\|^2 - \frac{\overline{\langle v,\ w \rangle}}{\|w\|^2} \langle v,\ w \rangle - \frac{\langle v,\ w \rangle}{\|w\|^2} \overline{\langle v,\ w \rangle} + \frac{\langle v,\ w \rangle \overline{\langle v,\ w \rangle}}{\left(\|w\|^2\right)^2} \|w\|^2$$

[1] Wir schreiben oft $\langle , \rangle$ statt $s(,)$.

Multiplikation mit $\|w\|^2$:

$$
\begin{aligned}
0 &\le \|v\|^2\|w\|^2 - \overline{\langle v,w\rangle}\,\langle v,w\rangle - \langle v,w\rangle\,\overline{\langle v,w\rangle} + \langle v,w\rangle\,\overline{\langle v,w\rangle}\\
&= \|v\|^2\|w\|^2 .\, |\langle v,w\rangle|^2
\end{aligned}
$$

Das ist äquivalent zu $|\langle v,w\rangle|^2 \le \|v\|^2\|w\|^2$. Daraus folgt die Behauptung. $\square$

Zu (ii): Zu zeigen:

$$
\begin{aligned}
& \sqrt{\langle v+w,\ v+w\rangle} \le \sqrt{\langle v,\ w\rangle} + \sqrt{\langle w,\ w\rangle}\\
\Leftrightarrow\quad & \underbrace{\langle v+w,\ v+w\rangle}_{=\|v\|^2+\langle v,\ w\rangle+\langle w,\ v\rangle+\|w\|^2} \le \|v\|^2 + 2\sqrt{\langle v,\ v\rangle}\sqrt{\langle w,\ w\rangle} + \|w\|^2\\
\Leftrightarrow\quad & \langle v,\ w\rangle + \overline{\langle v,\ w\rangle} \le 2\|v\|\|w\|
\end{aligned}
$$

Es gilt also: $\langle v,\ w\rangle + \overline{\langle v,\ w\rangle} \le 2\,|\langle v,\ w\rangle| \le 2\|v\|\|w\|$ $\square$

Definition 6.4. Sei V euklidischer bzw. unitärer Vektorraum. Zwei Vektoren $v, w \in V$ heißen *orthogonal*, falls

$$\langle v,\ w\rangle = 0$$

und wir schreiben $v \perp w$.

Allgemeiner (aber nur für $\mathbb{K} = \mathbb{R}$): Für $x, y \in V \setminus \{0\}$ ist

$$\cos\alpha\,(x,y) = \frac{\langle x,\ y\rangle}{\|x\|\cdot\|y\|}, \qquad 0 \le \alpha\,(x,y) < \pi$$

Bemerkung. Aus der Cauchy-Schwarzschen Ungleichung auf Seite 16 folgt: $\alpha\,(x,y)$ ist wohldefiniert.

Sei $M \subset V$ eine Teilmenge. Dann ist:

$$M^\perp := \{v \in V : v \perp m \text{ für alle } m \in M\}$$

Beispiel. $V = \mathbb{R}^2$.

$\left\langle \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} \right\rangle = a_1b_1 + a_2b_2 = 0$ ist beispielsweise erfüllt, wenn $b_1 = a_2$, $b_2 = -a_1$.

Lemma 6.5. *$M^\perp$ ist ein Untervektorraum, $\langle , \rangle$ induziert ein Skalarprodukt auf $M^\perp$. Ist $W \subset V$ ein Untervektorraum eines endlich-dimensionalen Vektorraums V, so gilt*[2]*:*

$$V \cong W \oplus W^\perp$$

Beweis. Seien $v, w \in M^\perp$, $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$. Zu zeigen: $\lambda v + \mu w \in M^\perp$.

$\langle \lambda v + \mu w,\ m\rangle = \bar\lambda\,\langle v,\ m\rangle + \bar\mu\,\langle v,\ m\rangle = \bar\lambda\cdot 0 + \bar\mu\cdot 0 = 0$ für alle $m \in M$. Induziertes Skalarprodukt ist automatisch. $\square$ **28.04.**

Definition 6.6. Ein Tupel $(x_1, \ldots, x_r)$ in einem euklidischen bzw. unitären Vektorraum heißt *orthonormal* (*Orthonormalsystem*), wenn

$$\|x_i\| = 1 \text{ für alle } i, \qquad x_i \perp x_j \text{ für } i \neq j.$$

Es heißt *Orthonormalbasis*, wenn es zusätzlich eine Basis von V ist.

Lemma 6.7. *Ein Orthonormalsystem ist linear unabhängig. Ist $v \in V$ mit $v \in \langle v_1, \ldots, v_r\rangle$ (v_i Orthonormalsystem), dann gilt:*

$$v = \sum_{i=1}^{r} \langle v_i,\ v\rangle\, v_i$$

[2] Beweis in 6.10 auf Seite 19.

Beweis. Sei $v_1, \dots, v_r$ ein Orthonormalsystem, $\lambda_1, \dots, \lambda_r \in \mathbb{K}$ mit

$$\lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_r v_r = 0$$

Betrachte:

$$\underbrace{0 = \langle x,\ v_i \rangle}_{\text{da } x=0} = \left\langle \sum \lambda_j v_j,\ v_i \right\rangle = \sum \overline{\lambda_j} \langle v_j,\ v_i \rangle = \overline{\lambda_i} \langle v_i,\ v_i \rangle = \overline{\lambda_i} \cdot 1$$

Daraus folgt: $\lambda_i = 0$ für $i = 1, \dots, r$. Also sind die $v_1, \dots, v_r$ linear unabhängig.

Sei $x \in \langle v_1, \dots, v_r \rangle$. Dann gibt es $\lambda_1, \dots, \lambda_r \in \mathbb{K}$ mit

$$x = \lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_r v_r.$$

Es folgt $\langle v_i,\ x \rangle = \lambda_i$. □

Beispiel. $V = \mathbb{K}^n$ mit Standardskalarprodukt. Dann ist die Standardbasis

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

eine Orthogonalbasis.

Satz 6.8 (Orthonormalisierungsverfahren). *Sei V ein euklidischer bzw. unitärer Vektorraum. $v_1, \dots, v_r$ seien linear unabhängig in V. Dann ist durch die Rekursionsgleichung*

$$\tilde{v}_1 = \frac{v_1}{\|v_1\|}, \qquad w_{k+1} = v_{k+1} - \sum_{i=1}^{k} \langle \tilde{v}_i,\ v_{k+1} \rangle \tilde{v}_i, \qquad \tilde{v}_{k+1} = \frac{w_{k+1}}{\|w_{k+1}\|}$$

ein Orthonormalsystem definiert mit $\langle v_1, \dots, v_r \rangle = \langle \tilde{v}_1, \dots, \tilde{v}_r \rangle$.

Beweis. *Induktion nach r:*

$r = 1$: $\langle v_1 \rangle = \left\langle \frac{v_1}{\|v_1\|} \right\rangle$, $\|\tilde{v}_1\| = 1$.
($v_1 \neq 0$, da $\{v_1\}$ linear unabhängig.)✓

Sei nun $r > 1$. *Induktionsannahme:* $\tilde{v}_1, \dots, \tilde{v}_{r-1}$ wohldefiniert, ein Orthogonalsystem und

$$\langle v_1, \dots, v_{r-1} \rangle = \langle \tilde{v}_1, \dots, \tilde{v}_{r-1} \rangle$$

Behauptung: $w_r \perp \tilde{v}_j$ für $j = 1, \dots, r-1$.

Es gilt:

$$\begin{aligned} \langle w_1,\ \tilde{v}_j \rangle &= \left\langle v_r - \sum_{i=1}^{r-1} \langle \tilde{v}_1,\ v_r \rangle \tilde{v}_i,\ \tilde{v}_j \right\rangle \\ &= \langle v_r,\ \tilde{v}_j \rangle - \sum_{i=1}^{r-1} \langle \tilde{v}_1,\ v_r \rangle \langle \tilde{v}_i,\ \tilde{v}_j \rangle \\ &= \langle v_r,\ \tilde{v}_j \rangle - \langle \tilde{v}_j,\ v_r \rangle \cdot 1 && \text{(denn } \tilde{v}_1, \dots, \tilde{v}_{r-1} \text{ ist ein Orthogonalsystem)} \\ &= 0 \end{aligned}$$

v_r ist linear unabhängig von $v_1, \dots, v_{r-1}$, d. h. $v_r \notin \langle v_1, \dots, v_{r-1} \rangle = \langle \tilde{v}_1, \dots, \tilde{v}_{r-1} \rangle$. Dann muss aber $w_r \neq 0$ sein. Dann ist $\tilde{v}_r$ wohldefiniert, hat Länge 1 und $\tilde{v}_1, \dots, \tilde{v}_r$ ist ein Orthogonalsystem.

Behauptung: $\langle v_1, \dots, v_r \rangle = \langle \tilde{v}_1, \dots, \tilde{v}_r \rangle$

Zu zeigen: $v_1, \dots, v_r \in \langle \tilde{v}_1, \dots, \tilde{v}_r \rangle$ und $\tilde{v}_1, \dots, \tilde{v}_r \in \langle v_1, \dots, v_r \rangle$.

Beide Aussagen richtig nach Induktionsannahme für $i = 1, \dots, r-1$.
$\tilde{v}_r \in \langle \tilde{v}_1, \dots, \tilde{v}_{r-1}, \tilde{v}_r \rangle = \langle v_1, \dots, v_{r-1}, v_r \rangle$ richtig nach Definition.
$v_r = w_r + \sum \langle \tilde{v}_i,\ v_r \rangle \tilde{v}_i = \|w_r\| \tilde{v}_r + \sum \langle \tilde{v}_i,\ v_r \rangle \tilde{v}_i$ □

Korollar 6.9. *Jeder endlich-dimensionale euklidische bzw. unitäre Vektorraum hat eine Orthogonalbasis.*

Beweis. Wende das Orthogonalisierungsverfahren auf eine Basis an. □

Beispiel. $\mathbb{R}^2$ mit Skalarprodukt $\left\langle \binom{a_1}{a_2}, \binom{b_1}{b_2} \right\rangle = 2a_1b_1 + a_2b_2$. Gesucht ist eine Orthogonalbasis.

$e_1 = \binom{1}{0}, e_2 = \binom{0}{1}$ ist eine Basis.

$$\langle e_1,\ e_1\rangle = 2+0, \qquad \|e_1\| = \sqrt{2}, \qquad \tilde{e}_1 = \frac{e_1}{\sqrt{2}}$$

$$w_2 = e_2 - \langle \tilde{e}_1,\ e_2\rangle\, \tilde{e}_1 = \binom{0}{1} - \underbrace{\left\langle \binom{\frac{1}{\sqrt{2}}}{0}, \binom{0}{1} \right\rangle}_{=0} \binom{\frac{1}{\sqrt{2}}}{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\tilde{e}_2 = \frac{w_2}{\|w_2\|} = e_2$$

Beispiel. Weitere Basis: $f_1 = e_1$, $f_2 = \binom{1}{1}$

$$\tilde{e}_1 = \binom{\frac{1}{\sqrt{2}}}{0}$$

$$\begin{aligned} w_2' = f_2 &= f_2 - \langle f_2,\ \tilde{e}_1\rangle\, \tilde{e}_1 \\ &= \binom{1}{1} - \left\langle \binom{1}{1}, \binom{\frac{1}{\sqrt{2}}}{0} \right\rangle \binom{\frac{1}{\sqrt{2}}}{0} \\ &= \binom{1}{1} - \sqrt{2} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{pmatrix} = \binom{1-1}{1} = \binom{0}{1} \end{aligned}$$

$$\tilde{f}_2 = \frac{w_2'}{\|w_2'\|} = \binom{0}{1}$$

Korollar 6.10. *Sei ein V endlich-dimensionaler euklidscher bzw. unitärer Vektorraum und $W \subset V$ ein Unterverktorraum. Dann ist*

$$V \cong W \oplus W^\perp$$

Beweis. Es gilt:

$$W \cap W^\perp = \{w \in W : w \perp w' \text{ für alle } w' \in W\} = \{0\}$$

Insbesondere gilt $w \perp w \Leftrightarrow \langle w,\ w\rangle = 0$. Also gilt $w = 0$, da $\langle ,\ \rangle$ positiv definit.

Zu zeigen: $W, W^\perp$ spannen ganz V auf.

Sei $w_1, \dots, w_r$ Orthogonalbasis von W. Ergänze zu Orthogonalbasis von V. $w_{r+1}, \dots, w_n$ sind orthogonal zu $w_1, \dots, w_r$, also auch orthogonal zu $W = \langle w_1, \dots, w_r\rangle$, also ist $w_{r+1}, \dots, w_n \in W^\perp$.

Also wird V durch Elemente von W und $W^\perp$ aufgespannt. □

Definition 6.11. Eine lineare Abbildung $f : V \to W$ zwischen euklidischen bzw. unitären Vektorräumen heißt *orthogonal* bzw. *unitär* (oder in beiden Fällen *isometrisch*), falls

$$\langle x,\ y\rangle = \langle f(x),\ f(y)\rangle$$

Falls f zusätzlich bijektiv ist, so heißt f *Isomorphismus*. Die Gruppe der (isometrischen) Isomorphismen eines euklidischen bzw. unitären Vektorraums V wird als *orthogonale Gruppe* $\mathrm{O}(V)$ bzw. *unitäre Gruppe* $\mathrm{U}(V)$ bezeichnet. Für $V = \mathbb{K}^n$ mit Standardskalarprodukt schreibt man $\mathrm{O}(n)$ bzw. $\mathrm{U}(n)$.

Wir haben gerade gezeigt:

Bemerkung (Korollar 6.9'). Sei V ein endlich-dimensionaler euklidischer bzw. unitärer Vektorraum. Dann ist V isomorph zu $\mathbb{K}^n$ mit Standardskalarprodukt.

Beweis. $v_1, \ldots, v_n$ ist eine Orthogonalbasis. Betrachte

$$f : \mathbb{K}^n \to V, \qquad \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \mapsto \sum a_i v_i$$

f Ist linear und bijektiv. Zusätzlich ist f verträglich mit dem Skalarprodukt:

$$\left\langle \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \right\rangle = \sum_{i=1}^{n} \overline{a_i} b_i$$

$$\left\langle f\left(\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}\right), f\left(\begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}\right) \right\rangle = \left\langle \sum_{i=1}^{n} a_i v_i, \sum_{j=1}^{n} b_j v_j \right\rangle = \sum_{i,j=1}^{n} \overline{a_i} b_j \langle v_i, v_j \rangle = \begin{cases} 0 & j \neq j \\ 1 & i = j \end{cases}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \overline{a_i} b_i \cdot 1$$

□

Der Isomorphismus aus 6.9' identifiziert auch $\mathrm{O}(V)$ mit

Lemma 6.12. *Seien V, W euklidische bzw unitäre Vektorräume mit Orthonormalbasen $v_1, \ldots, v_n$ von V und $w_1, \ldots, w_n$ von W, $f : V \to W$ isometrisch. Dann ist die darstellende Matrix bezüglich dieser Basen* orthogonal *bzw.* unitär, *d. h. die Spaltenvektoren bilden ein Orthonormalsystem bezüglich des Standardskalarproduktes auf $\mathbb{K}^n$. ($\Leftrightarrow \bar{M}^t M = \mathrm{Id}$)*

Beispiel. Die Drehmatrix

$$\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$$

ist eine orthogonale Matrix.

Beweis. $f : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n$ ist isometrische Abbildung (bezüglich des Standardskalarproduktes). f ist Multiplikation mit Matrix M.

$$\underbrace{\langle v_i, v_j \rangle}_{=\begin{cases} 0 & i \neq j \\ 1 & i = j \end{cases}} = \langle f(v_i), f(v_j) \rangle \qquad \text{nach Voraussetzung}$$

Die $f(v_i)$ sind die Spalten der Matrix M, d. h. die Spalten bilden ein Orthonormalsystem. □

04.05.

Lemma 6.13. *Eigenschaften einer isometrischen Abbildung $f : V \to W$:*

1) $\|f(v)\|_W = \|v\|_V$.
2) $v \perp v'$ *in* $V \Rightarrow f(v) \perp f(v')$ *in* W.
3) $f : V \to V$ *isometrischer Endomorphismus* $\Rightarrow f$ *injektiv. Falls* $\dim V < \infty$, *ist* f *sogar bijektiv.*
4) λ *Eigenwert eines isometrischen Endomorphismus* $\Rightarrow |\lambda| = 1$.
5) v_1, v_2 *Eigenvektoren zu verschiedenen Eigenwerten* $\lambda_1, \lambda_2 \Rightarrow v_1 \perp v_2$.[3]

Beweis.

1) Da f isometrisch ist, gilt: $\|f(v)\| = \sqrt{\langle f(v), f(v) \rangle} = \langle v, v \rangle = \|v\|$
2) $0 = \langle v, v' \rangle = \langle f(v), f(v') \rangle$, d. h. $f(v) \perp f(v')$
3) Sei $v \in \ker f$. Dann ist $\|v\| \overset{1)}{=} \|f(v)\| = \|0\| = 0$.
4) v sei ein Eigenvektor zum Eigenwert λ. $f(v) = \lambda v \Rightarrow \|f(v)\| = \|\lambda v\| = |\lambda| \|v\|$. Nach 1) gilt $\|f(v)\| = \|v\|$. Aus $v \neq 0$ folgt $\|v\| \neq 0$, also ist $|\lambda| = 1$.

Beispiel. Betrachte $\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ mit Standardskalarprodukt: Drehungen erhalten Längen und Winkel.

Bemerkung. $M^t M = \mathrm{Id}$ für M quadratisch. $\Rightarrow M^t = M^{-1}$, d. h. insbesondere existiert M^{-1}.

[3] Beweis bleibt noch schuldig. Die Aussage ist dennoch richtig!

6.2 Hauptachsentransformation

Definition 6.14. Sei V euklidischer bzw. unitärer Vektorraum. Ein Endomorphismus $f : V \to V$ heißt *selbstadjungiert*, wenn gilt:

$$\langle f(v), v' \rangle = \langle v, f(v') \rangle \qquad \text{für alle } v, v' \in V$$

Satz 6.15. *Sei V endlich dimensional. Die darstellende Matrix eines selbstadjungierten Endomorphismus' bezüglich einer Orthonormalbasis ist* symmetrisch *bzw.* hermitesch *(d. h. $A = \bar{A}^t$).*

Beweis. Wahl der Orthonormalbasis identifiziert V mit $\mathbb{K}^n$ mit Standardskalarprodukt. f ist gegeben durch Multiplikation mit der darstellenden Matrix A:

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{f} & V \\ \cong\downarrow & & \downarrow\cong \\ \mathbb{K}^n & \xrightarrow[A]{} & \mathbb{K}^n \end{array}$$

Es gilt:

$$\bar{a}_{ji} = (\bar{a}_{1i}, \bar{a}_{2_i}, \ldots, \bar{a}_{ni}) \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \langle Ae_i, e_j \rangle = \langle e_i, Ae_j \rangle = (0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0) \begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{nj} \end{pmatrix} = a_{ij}$$

Dies ist die Behauptung. □

Lemma 6.16. *Sei V ein euklidischer bzw. unitärer Vektorraum, f ein selbstadjungierter Endomorphismus und $W \subset V$ sei f-stabil. Dann ist auch $W^\perp$ f-stabil.*

Beweis. Es ist $W^\perp = \{v \in V : v \perp w \text{ für alle } w \in W\}$.

Zu zeigen: $f(W^\perp) \subset W^\perp$

Sei $v \in W^\perp$. Es gilt:

$$\underbrace{\langle f(v), w \rangle}_{\text{für } v \in W^\perp} = \underbrace{\langle v, f(w) \rangle}_{\substack{f(w) \in W, \\ \text{da } W \ f\text{-stabil}}} = 0, \text{ da } v \in W^\perp$$

Dies gilt für alle $w \in W$, d. h. tatsächlich $f(v) \in W^\perp$ □

Bemerkung.

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{\cong} & W \oplus W^\perp \\ f\downarrow & & \downarrow (f|_W, f|_{W^\perp}) \\ V & \xrightarrow[\cong]{} & W \oplus W^\perp \end{array}$$

Dies erinnert an die Beweise beim Diagonalisieren. Wie steht es mit Eigenvektoren?

Lemma 6.17.

a) *Sei V unitär und $f : V \to V$ selbstadjungiert. Dann sind die Eigenwerte reell.*

b) *Sei V euklidisch und $f : V \to V$ selbstadjungiert. Dann existiert ein Eigenwert.*

Beweis.

a) Sei $v \neq 0$, $f(v) = \lambda v$. Dann gilt:

$$\bar{\lambda}\|v\|^2 = \langle \lambda v,\ v\rangle = \langle f(v),\ v\rangle = \langle v,\ f(v)\rangle = \langle v,\ \lambda v\rangle = \lambda\|v\|^2$$

Da $\|v\| \neq 0$, muss auch $\|v\|^2 \neq 0$, also ist $\bar{\lambda} = \lambda$, d. h. $\lambda \in \mathbb{R}$. □

b) V ist euklidisch, o. B. d. A. ist $V = \mathbb{R}^n$ mit Standardskalarprodukt. f ist Mutliplikation mit symmetrischer Matrix A. Fasse A als hermitesche Matrix auf, d. h. $A : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ ist selbstadjungierter Endomorphismus für $\mathbb{C}^n$ mit Standardskalarprodukt.

$$\chi_f(T) = \chi_A(T)$$

χ_A hat eine Nullstelle in $\mathbb{C}$. Da A hermitesch ist, folgt nach a), dass diese Nullstelle in $\mathbb{R}$ liegt. Also hat V einen Eigenwert bezüglich f. □

Lemma 6.18. *Sei V euklidisch bzw. unitär und $f : V \to V$ selbstadjungiert. Seien v_1, v_2 Eigenvektoren zu unterschiedlichen Eigenwerten. Dann ist $v_1 \perp v_2$.*

Beweis. Es gilt:

$$\lambda_1 \langle v_1,\ v_2\rangle = \langle \lambda_1 v_1,\ v_2\rangle = \langle f(v_1),\ v_2\rangle = \langle v_1,\ f(v_2)\rangle = \langle v_1,\ \lambda_2 v_2\rangle = \lambda_2 \langle v_1,\ v_2\rangle$$

Also: $(\lambda_1 - \lambda_2)\langle v_1,\ v_2\rangle = 0$. Da $\lambda_1 \neq \lambda_2$, muss $\langle v_1,\ v_2\rangle = 0$ sein. □

Theorem 6.19 (Hauptachsentransformation/Spektralsatz). *Sei V endlich-dimensionaler euklidischer bzw. unitärer Vektorraum, $f : V \to V$ selbstadjungierter Endomorphismus. Dann hat V eine Orthonormalbasis aus Eigenvektoren.*

Beweis. Nach 6.17 existiert ein Eigenvektor v. Sei $v_1 = \frac{1}{\|v\|}v$, d. h. v_1 hat Länge 1.

$\langle v\rangle \subset V$ ist f-stabil, da v Eigenvektor ist. Nach 6.16 ist auch $W = \langle v\rangle^\perp$ f-stabil. Es gilt $V \cong \langle v\rangle \oplus W$ und insbesondere $\dim W = \dim V - 1$.

Vollständige Induktion nach $\dim V$*:* Für $\dim V = 0$ ist nichts zu zeigen.

$f|_W : W \to W$ ist selbstadjungiert. Also hat W nach Induktionsannahme eine Orthonormalbasis $v_2, \ldots, v_n$ aus Eigenvektoren. Dann ist $v_1, v_2, \ldots, v_n$ eine Orthonormalbasis aus Eigenvektoren für V. □

Beispiel (Physik). Ein starrer Körper im Raum hat Bewegungsgleichungen:

$$\vec{L} = I\vec{\omega} \qquad \text{mit } \vec{L} \text{ Drehimpuls, } I \text{ Trägheitstensor, } \vec{\omega} \text{ Winkelgeschwindigkeit}$$

I definiert eine selbstadjungierte Abbildung $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$. Nach 6.19 gibt es Orthogonalbasis des $\mathbb{R}^3$ aus Eigenvektoren für I. Das sind stabile Drehachsen – so genannte *Hauptachsen*.

7 Bilineare Abbildungen

Ab diesem Abschnitt ist K wieder ein beliebiger Körper.

Definition 7.1. Seien V, W, U K-Vektorräume. Eine Abbildung $s : V \times W \to U$ heißt *bilinear*, falls

(i) $s(v, \cdot) : W \to U$ linear für alle $v \in V$.

(ii) $s(\cdot, w) : V \to U$ linear für alle $w \in W$.

s heißt *Paarung*, falls $U = K$.

s heißt *Bilinearform*, falls $U = K$ und $V = W$, also $s : V \times V \to K$.

Eine Paarung heißt *nicht-ausgeartet*, falls gilt:

(iii) Ist $v \in V$ mit $s(v, w) = 0$ für alle $w \in W \Rightarrow v = 0$.

(iv) Ist $w \in W$ mit $s(v, w) = 0$ für alle $v \in V \Rightarrow w = 0$.

Eine Bilinearform heißt *symmetrisch*, wenn

(v) $s(v, v') = s(v', v)$ für alle $v, v' \in V$.

Sie heißt *definit*, wenn $s(v, v) \neq 0$ für alle $v \in V \setminus \{0\}$.

Beispiel.

- $K = \mathbb{R}$, $s : V \times V \to \mathbb{R}$ Skalarprodukt. $\Rightarrow s$ Bilinearform.
- $K = \mathbb{C}$, $s : V \times V \to \mathbb{C}$ Skalarprodukt. $\Rightarrow s$ keine Bilinearform, sondern Sesquilinearform.

Beispiel. Erinnerung: Sei V Vektorraum. $V^* = \mathrm{Hom}_K(V, K)$ Raum der Linearformen.

$$\langle , \rangle : V \times V^* \to K, \qquad (v, f) \mapsto f(v)$$

ist eine Paarung (*kanonische Paarung*).

v fest:

$$\langle v,\ \lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2\rangle = (\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2)(v) = \lambda_1 f_1(v) + \lambda_2 f_2(v) = \lambda_1 \langle v,\ f_1\rangle + \lambda_2 \langle v,\ f_2\rangle = \lambda_1 f(v_1) + \lambda_2 f(v_2)$$

f fest:

$$\langle \mu_1 v_1 + \mu_2 v_2,\ v\rangle = f(\mu_1 v_1 + \mu_2 v_2) = \mu_1 f(v_1) + \mu_2 f(v_2) = \mu_1 \langle v_1,\ f\rangle + \mu_2 \langle v_2,\ f\rangle$$

Bemerkung. definit $\Rightarrow$ nicht-ausgeartet: (iii) $\Leftrightarrow$ Zu $v \in V \setminus \{0\}$ gibt es ein $w \in W$ mit $s(v, w) \neq 0$. Hier z. B. $w = v$.

Beispiel. $V = \mathbb{R}^4$. $s(x, y) = x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3 - x_4 y_4$ ist nicht definit, denn:
Sei $x = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Dann ist $s(x, x) = 1 + 0 + 0 - 1 = 0$.

Aber s ist nicht ausgeartet: Zu $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$ gibt es $y = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ -x_4 \end{pmatrix}$.
Dann gilt: $\langle x,\ y\rangle = {x_1}^2 + {x_2}^2 + {x_3}^2 + {x_4}^2 \neq 0$ für $x \neq 0$.

Dies ist die „Metrik“ der Relativitätstheorie.

05.05.

Lemma 7.2. *Sei $s : V \times W \to K$ eine Paarung. Dann sind*

$$\begin{aligned} s_2 : V \to W^*, &\quad v \mapsto [s_2(v) : W \to K, \qquad w \mapsto s(v, w)] \\ s_1 : W \to V^*, &\quad w \mapsto [s_1(w) : V \to K, \qquad v \mapsto s(v, w)] \end{aligned}$$

lineare Abbildungen.

s_2 ist genau dann injektiv, wenn (iii) *gilt. s_1 ist genau dann injektiv, wenn* (iv) *gilt.*

Im Fall $V = W$ stimmen $s_1, s_2 : V \to V^*$ genau dann überein, wenn s symmetrisch ist.

Beweis. s_2 ist linear: Zu zeigen: $s_2(\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2) = \lambda_1 s_2(v_1) + \lambda_2 s_2(v_2)$, in W^*, $\lambda_1, \lambda_2 \in K$, $v_1, v_2 \in V$.

Für $w \in W$

$$\begin{aligned} s_2(\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2)(w) &= s(\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2, w) \in K \\ (\lambda_1 s_2(v_1) + \lambda_2 s_2(v_2))(w) &= \lambda_1 s_2(v_1)(w) + \lambda_2 s_2(v_1)(w) \\ &= \lambda_1 s(v_1, w) + \lambda_2 s_2(v_2, w) \in K \end{aligned}$$

Beides stimmt nach (i) überein. Genauso für s_1.

s_2 injektiv $\Leftrightarrow s_2(v) \neq 0$ in W^* für $v \neq 0$ in V.
$\Leftrightarrow$ Für $v \neq 0$ in V gibt es w in W mit $s_2(v)(w) \neq 0$ in K.
$\Leftrightarrow$ Für $v \neq 0$ in V gibt es w in W mit $s(v,w) \neq 0$ in K.
$\Leftrightarrow$ (iii).

Ebenso: s_1 injektiv $\Leftrightarrow$ (iv).

Sei $V = W$. $s : V \times V \to K$.

$s_1 = s_2 : V \to V^* \Leftrightarrow$ Für alle $v \in V$ ist $s_1(v) = s_2(v)$ in V^*.
$\Leftrightarrow$ Für alle $v \in V$ und alle $w \in W$ ist $s_1(v)(w) = s_2(v)(w)$.
$\Leftrightarrow$ Für alle $v \in V$ und alle $w \in W$ ist $s(w,v) = s(v,w)$. □

Lemma 7.3. *Seien V, W endlich-dimensionale Vektorräume und $s : V \times W \to K$ eine Paarung. Dann sind äquivalent:*

(i) *s ist nicht-ausgeartet.*

(ii) *s_2 ist ein Isomorphismus.*

(iii) *s_1 ist ein Isomorphismus.*

Beweis. Es gilt (i) $\overset{7.2}{\Longrightarrow} s_1, s_2$ injektiv. Daher:

$$\dim V \leq \dim W^* = \dim W \leq V^* = \dim V$$

Alle Dimensionen sind also gleich. Nach Dimensionsformel sind s_1, s_2 surjektiv. Also gilt (i) $\Rightarrow$ (ii), (iii).

Sei nun $s_1 : W \to V^*$ bijektiv. $\Rightarrow \dim W = \dim V^* = \dim V = \dim W^*$. Noch zu zeigen: s_2 injektiv. $s_2 : V \to W^*$.

Sei $v \in \ker s_2$, d.h. $s_2(v) = 0$ in $W^* \Leftrightarrow \underbrace{s_2(v)(w)}_{=s(v,w)} = 0$ in K für alle $w \in W$.

Angenommen $v \neq 0$. Dann gibt es $v^* \in V^*$ mit $v^*(v) \neq 0$.[1] Da s_1 surjektiv ist, gibt es nun $w \in W$ mit $s_1(w) = v^*$ in V^*.

Auswertung in v ergibt $\underbrace{s_1(w)(v)}_{=s(v,w)} = v^*(v) \neq 0$ im Widerspruch zu $v \in \ker s_2$! $\Rightarrow \ker s_2 = \{0\}$ □

Korollar 7.4. *Sei V endlich-dimensional, $s : V \times V \to K$ Bilinearform. Dann sind äquivalent:*

(i) *s ist nicht-ausgeartet.*

(ii) *s_1 ist injektiv.*

(iii) *s_2 ist injektiv.*

(iv) *s_1 ist surjektiv.*

(v) *s_2 ist surjektiv.*

Beweis. Wegen $\dim V = \dim V^*$ ist Injektivität von $s_1 : V \to V^*$ äquivalent zur Bijektivität.
Aussage folgt aus 7.3. □

Bemerkung. $\dim V = \dim V^* \Rightarrow$ Es gibt Isomorphismen $V \to V^*$. Diese sind nicht kanonisch, sondern hängen von Basiswahl ab.

$s : V \times V \to K$ symmetrisch, bilinear, nicht-ausgeartet $\Rightarrow$ Isomorphismus $s_1 = s_2 : V \to V^*$ kanonisch für (V, s).

[1] Aus Linearer Algebra I: Ergänze $\{v\}$ zu einer Basis $v, v_2, \ldots, v_n$ von V. $v^* : V \to K$, $v \mapsto 1$, $v_i \mapsto$ beliebig, $i = 2, \ldots, n$.

Beispiel. $s : V \times V \to K^n$, $(v, w) \mapsto v^t w \Rightarrow$ Isomorphismus zwischen V und V^*: $v \mapsto v^t$

Wir übersetzen in die Sprache der Matrizen.

Lemma 7.5. *Sei $A \in M_{n\times m}(K)$. Die Abbildung*

$$s : K^n \times K^m \to K, \qquad (v, w) \to v^t A w$$

ist bilinear. Sie ist symmetrisch, wenn

$$A = A^t \qquad (A \text{ heißt dann symmetrisch}).$$

Beweis. Bilinearität von s folgt aus der Bilinearität des Matrixproduktes, wenn $m = n$ gilt:

$$(M, M') \mapsto MM'.$$

s symmetrisch $\Leftrightarrow v^t A w = w^t A v$ für alle $v, w \in K^n$ $(n = m)$. Es gilt für beliebige Matrizen:

$$M^t M'^t = (M'M)^t$$

Also:

$$\underbrace{(v^t A w)^t}_{v^t A w} = w^t A^t (v^t)^t = w^t A^t v$$

s symmetrisch $\Leftrightarrow v^t A w = w^t A v = w^t A^t v$ für alle $v, w \in K^n$.
$\Leftrightarrow A = A^t$.[2] □

Satz 7.6 (Darstellende Matrizen). *Sei $v = (v_1, \ldots, v_n)$ eine Basis von V, $w = (w_1, \ldots, w_n)$ eine Basis von W und $s : V \times W \to K$ bilinear. Dann gibt es eine (eindeutige) Matrix $M^{v,w}(s) \in M_{n\times m}(K)$ mit*

$$s(x, y) = (a_1, \ldots, a_m)\, M^{v,w}(s) \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \qquad \text{für } x = a_1 v_1 + a_2 v_2 + \ldots + a_m v_m,\ y = b_1 w_1 + \ldots + b_n w_n.$$

Für $V = W$ ist $M^{v,v}(s)$ symmetrisch genau dann, wenn s symmetrisch ist.

Beweis. Man setzt $M^{v,w}(s)_{i,j} = s(v_i, w_j)$. Dann gilt

$$s(x, y) = \left(\sum_i a_i v_i, \sum_j b_j w_j\right) = \sum_{i,j} a_i b_j s(v_i, w_j) = \sum_{i,j} a_i M^{v,w}(s)_{i,j} b_j = a^t M^{v,w}(s)\, b$$

s symmetrisch $\Leftrightarrow K^n \times K^n \to K$, $(a, b) \mapsto a^t M^{v,w}(s)\, b$ symmetrisch $\overset{7.5}{\Longleftrightarrow} M^{v,w}(s)$ symmetrisch. □

Satz 7.7 (Transformationsformel). *Seien V, W, v, w, s wie in 7.6. Sei $v'_1, \ldots, v'_m$ eine zweite Basis von V und $w'_1, \ldots, w'_n$ eine zweite Basis von W mit Basiswechselmatrizen $S = M^v_{v'}(\mathrm{Id})$ und $T = M^w_{w'}(\mathrm{Id})$. Dann gilt:*

$$M^{v,w}(s) = S^t M^{v',w'}(s)\, T$$

Beweis. Nach Definition der Basiswechselmatrix ist für $x = a_1 v_1 + \ldots + a_m v_m$

$$M^v_{v'}(\mathrm{Id}) \left(\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_m \end{pmatrix}\right)$$

der Koordinatenvektor von x bezüglich v'.

Koordinatenvektor von y bezüglich w' ist:

$$M^w_{w'}(\mathrm{Id}) \left(\begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}\right)$$

Dann folgt: $s(x, y) = a^t M^{v,w}(s)\, b = \left(a^t M^v_{v'}(\mathrm{Id})^t\right) M^{v',w'}(s)\, M^w_{w'}(\mathrm{Id})\, b$
Also: $M^{v,w}(s) = M^v_{v'}(\mathrm{Id})^t\, M^{v',w}(s)\, M^w_{w'}(\mathrm{Id})$. □

[2] „$\Leftarrow$“ klar. „$\Rightarrow$“: Wähle $w = e_i$, $v = e_j$ der Standardbasis des K^n. Dann ist $e_i{}^t A^t e_j = a_{ji}$.

Bemerkung. Matrizen können also lineare Abbildungen oder Paarungen darstellen. Den Unterschied zeigt die Transformationsformel:

$$\text{linear: } M' = S^{-1}MT \qquad \text{bilinear: } M' = S^t MT$$

Physiker sagen: $S^{-1}MT$ ist ein $(1,1)$-Tensor und S^tMT ist ein $(2,0)$-Tensor.

Definition 7.8. Seien (V, s), (V', s') Vektorräume mit Bilinearform. Eine lineare Abbildung $f : V \to V'$ heißt *orthogonal*, falls

$$s(v, w) = s'(f(v), f(w)) \qquad \text{für alle } v, w \in V.$$

Bemerkung (Satz 7.6'). Sei V endlich-dimensional, $s : V \times V \to K$ bilinear. Dann gibt es einen orthogonalen Isomorphismus $f : V \times V \to K^n$ wobei K^n mit der Bilinearform $(a, b) \mapsto a^t Mb$ versehen wird.

Frage: Können wir dieses M besonders einfach wählen? Ja, für $K = \mathbb{R}$ und s Skalarprodukt. Dann existiert eine Orthonormalbasis.

11.05.

Lemma 7.9. *Sei M darstellende Matrix einer Paarung $s : V \times W \to K$ bezüglich der Basen $v_1, \ldots, v_m$ von V und $w_1, \ldots, w_n$ von W. s ist nicht-ausgeartet genau dann, wenn $n = m$ und M vollen Rang hat ($\Leftrightarrow$ M invertierbar).*

Beweis. Wir wissen bereits: s nicht-ausgeartet $\Rightarrow \dim V = \dim W$, d. h. $n = m$. Mit 7.6' genügt es, $V = W = K^n$ zu betrachten. $s(x, y) = x^t My$

Falls M nicht invertierbar $\Leftrightarrow$ Es gibt $y \in K^n$ mit $My = 0$, $y \neq 0$. Dann folgt $s(x, y) = x^t My = x^t 0_{K^n} = 0_K$, d. h. s ist ausgeartet.

Falls M invertierbar: Sei $x \in K^n$ mit $x^t My = 0$ für alle $y \in K^n$. Sei $w_i \in K^n$ Lösung von $Mw_i = e_i$, e_i der i-te Einheitsvektor, d. h. $w_i = M^{-1}e_i$.
$\Rightarrow 0 = x^t Mw_i = x^t MM^{-1}e_i = x^t e_i = x_i$ für alle $i = 1, \ldots, n$, also ist $x = 0$. Ebenso für das zweite Argument. □

Bemerkung. Dies gilt insbesondere für Bilinearformen $s : V \times V \to K$.

Definition 7.10. Sei $s : V \times V \to K$ symmetrische Bilinearform. Dann heißt

$$q : V \to K, \qquad x \mapsto s(x, x)$$

die zu s assoziierte *quadratische Form*.

Bemerkung. Es gilt $q(\lambda x) = s(\lambda x, \lambda x) = \lambda^2 s(x, x) = \lambda^2 q(x)$, $x \in V$, $\lambda \in K$.

Lemma 7.11. *Sei* $\operatorname{char} K \neq 2$ *(Charakteristik, d. h. $0 \neq 2$ in K), $s : V \times V \to K$ symmetrische Bilinearform, q die assoziierte quadratische Form. Dann ist s eindeutig durch q bestimmt.*

Beweis. Seien $x, y \in V$. Es gilt:

$$\begin{aligned} q(x+y) - q(x) - q(y) &= s(x+y, x+y) - s(x,x) - s(y,y) \\ &= s(x,x) + s(x,y) + s(y,x) + s(y,y) - s(x,x) - s(y,y) \\ &= 2s(x,y) \qquad \text{da } s \text{ symmetrisch,} \end{aligned}$$

d. h. $s(x, y) = \frac{1}{2}(q(x+y) - q(x) - q(y))$. □

Theorem 7.12 (Existenz von Orthogonalbasen). *Sei K Körper mit* $\operatorname{char} K \neq 2$, *$s : V \times V \to K$ symmetrische Bilinearform und V endlich-dimensional. Dann gibt es eine Orthogonalbasis von V bezüglich s, d. h. $b_1, \ldots, b_n \in V$ ist eine Basis mit $s(b_i, b_j) = 0$ für alle $i \neq j$. Die darstellende Matrix von s bezüglich dieser Basis hat Diagonalgestalt.*

Bemerkung. s ist nicht-ausgeartet, wenn in der Diagonalmatrix des Theorems 7.12 auf der Diagonalen nur Elemente ungleich Null stehen.

Beweis. Sei q die zu s assoziierte quadratische Form.

Induktion nach $\dim V$*:*

$\dim V = 0$: V ist der Nullvektorraum. Es ist nichts zu zeigen.

Sei nun $\dim V > 0$.

Erster Fall. $q(x) = 0$ für alle $x \in V$. Nach dem Lemma 7.11 gilt dann auch $s(v,w) = 0$ für alle $v, w \in V$. Jede Basis ist Orthogonalbasis.

Zweiter Fall. Es gibt $x_0 \in V$ mit $q(x_0) \neq 0$. Sei

$$W = \{v \in V : s(x_0, v) = 0\}.$$

$x_0 \notin W$, da $s(x_0, x_0) = q(x_0) \neq 0$. Also $W \subsetneq V$, $\dim W < \dim V$.

$s|_W : W \times W \to K$ ist symmetrische Bilinearform. Nach Induktionsvoraussetzung gibt es eine Orthogonalbasis $x_1, \ldots, x_m$ von W.

Behauptung: $x_0, x_1, \ldots, x_m$ ist Orthogonalbasis von V.

Beweis.

- orthogonal: $s(x_i, x_j)$, $i \neq j$, $i, j > 0$ orthogonal nach Wahl der Basis von W. Bei $i = 0$ oder $j = 0$: $s(x_0, x_j) = 0$, da $x_j \in W$.
- linear unabhängig: Sei $0 = a_0x_0 + \ldots + a_mx_m$, $a_i \in K$. Es gilt:

$$0 = s(x_0, 0) = s(x_0, a_0x_0 + \ldots + a_mx_m) = a_0 \underbrace{s(x_0, x_0)}_{\substack{\neq 0 \text{ nach} \\ \text{Wahl von } x_0}} + \sum_{i=1}^{m} a_i \underbrace{s(x_0, x_i)}_{\substack{= 0, \text{ da} \\ x_i \in W}} = a_0 \cdot s(x_0, x_0)$$

  Also: $0 = a_1x_1 + \ldots + a_mx_m$, $x_1, \ldots, x_m$ linear unabhängig $\Rightarrow a_i = 0$ für $i = 1, \ldots, m$.
  $\Rightarrow a_0, \ldots, a_m = 0$, die Linearkombination ist trivial.
- $x_1, \ldots, x_m$ bilden Erzeugendensystem: $x \in V$. Betrachte $x' = x - \frac{s(x,x_0)}{s(x_0,x_0)}x_0$:

$$s(x_0, x') = s(x_0, x) - \frac{s(x, x_0)}{s(x_0, x_0)} s(x_0, x_0) = 0 \qquad \text{da } s \text{ bilinear und symmetrisch}$$

  Also gilt: $x' \in W$, $x_1, \ldots, x_m$ erzeugen W, also gilt $x' = b_1x_1 + \ldots + b_mx_m$, $b_i \in K$:

$$x = \underbrace{\frac{s(x, x_0)}{s(x_0, x_0)}}_{b_0} x_0 + x' = b_0x_0 + b_1x_1 + \ldots + b_mx_m$$

□

Symmetrische Bilinearform: $x^tAy = a_1x_1y_1 + a_2x_2y_2 + \ldots + a_nx_ny_n$ (bezüglich Orthogonalbasis) wenn A Diagonalmatrix.

Korollar 7.13. *Sei V endlich-dimensional, $s : V \times V \to K$ symmetrische Bilinearform, K algebraisch abgeschlossen,* $\operatorname{char} K \neq 2$. *Dann existiert eine Basis $x_1, \ldots, x_n$ und $n_0 \in \mathbb{N}$ mit*

$$s(x_i, x_j) = \begin{cases} 0 & i \neq j \text{ oder } i = j > n_0 \\ 1 & i = j,\ i \leq n_0 \end{cases}$$

Beweis. Sei $b_1, \ldots, b_n$ die Basis aus Theorem 7.12, $a_i = s(x_i, x_i)$. O. B. d. A. sei $a \neq 0$ für $i \leq n_0$, $a_i = 0$ für $i > n_0$.

Für $i \leq n_0$: $x_i = \frac{1}{\sqrt{a_i}} b_i$, $s(x_i, x_j) = 0$ für $i \neq j$.

Für $i > n_0$: $x_i = b_i$, $s(x_0, x_0) = 0$ für $i > n_0$, $s(x_i, x_i) = s\left(\frac{1}{\sqrt{a_i}}, \frac{1}{\sqrt{a_i}} b_i\right) = \frac{1}{\sqrt{a_i}\sqrt{a_i}} s(b_i, b_i) = \frac{a_i}{a_i} = 1$ □

Bemerkung. Dies gilt insbesondere für $K = \mathbb{C}$. Die Aussage ist nicht wie in 6, dort ging es um Sesquilinearformen.

Korollar 7.14 (Trägheitssatz von Sylvester). *Sei $s : V \times V \to \mathbb{R}$ eine symmetrische Bilinearform, $\dim V < \infty$. Dann gibt es eindeutig bestimmte Zahlen $n \geq r \geq 0$ und eine Orthogonalbasis $b_1, \ldots, b_m$ von V, so dass die darstellende Matrix die Gestalt*

$$\begin{pmatrix} 1 &&&&&&& \\ & \ddots &&&&&& \\ && 1 &&&&& \\ &&& -1 &&&& \\ &&&& \ddots &&& \\ &&&&& -1 && \\ &&&&&& 0 & \\ &&&&&&& \ddots & \\ &&&&&&&& 0 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \left.\vphantom{\begin{matrix}1\\ \ddots \\ 1\end{matrix}}\right\} r \\ \left.\vphantom{\begin{matrix}-1\\ \ddots \\ -1\end{matrix}}\right\} n-r \\ \vphantom{\begin{matrix}0\\ \ddots \\ 0\end{matrix}} \end{array}$$

hat. n heißt Rang, *r* Index.

Bemerkung. s ist nicht-ausgeartet, falls $n = \dim V$. s ist Skalarprodukt ($\Leftrightarrow$ positiv definit), falls $n = r = \dim V$.

Beweis. Sei $x_1, \ldots, x_m$ die Basis aus Theorem 7.12, $a_i = s(x_i, x_i)$. Drei Fälle: $a_i > 0$, $a_i < 0$, $a_i = 0$.

Wir sortieren die x_i so, dass $a_i > 0$ für $i = 1, \ldots, r$, $a_i < 0$ für $i = r+1, \ldots, n$, $a_i = 0$ für $i = n+1, \ldots, m$.

Für $i \leq n$: $b_i = \frac{1}{\sqrt{|a_i|}} x_i$.

Für $i > n$: $b_i = x_i$.

Orthogonalbasis mit $s(x_i, x_i) = \begin{cases} 1 & i \leq r \\ -1 & r < i \leq n \\ 0 & n < j \end{cases}$

Behauptung: n, r hängen nicht von der Wahl der Basis ab.

Sei $V_1^+ = \langle b_1, \ldots, b_r \rangle$, $V_1^- = \langle b_{r+1}, \ldots, b_n \rangle$, $V_1^0 = \langle b_{n+1}, \ldots, b_m \rangle$. Sei $c_1, \ldots, c_m$ eine weitere Basis mit darstellender Matrix in der vorgegebenen Form. Dann sind:

$$V_2^+ = \langle c_1, \ldots, c_{r'} \rangle, \qquad V_2^- = \langle c_{r'+1}, \ldots, c_{n'} \rangle, \qquad V_2^0 = \langle c_{n'+1}, \ldots, c_m \rangle$$

$V_1^0 = V_2^0 = \{v \in V : s(v, w) = 0 \text{ für alle } w \in V\}$, $\dim V_1^0 = \dim V_2^0 \Rightarrow n = n'$

$s|_{V_1^+}$ ist positiv definit. $\underbrace{V_1^+}_{s(v,v)>0} \cap \underbrace{\left(V_2^- \oplus V^0\right)}_{s(v,v)\leq 0} = \{0\} \Rightarrow \underbrace{\dim V_1^+}_{=r} + \underbrace{\dim \left(V_2^- \oplus V^0\right)}_{m-r'} \leq m \Rightarrow r \leq r'$

Ebenso zeigt man $r' \leq r$, also $r = r'$. □ 12.05.

Definition 7.15. Sei $s : V \times W \to K$ eine nicht-ausgeartete Paarung und seien $f : V \to V$, $g : W \to W$ Endomorphismen. Dann heißen f und g *adjungiert*, falls gilt

$$s(f(v), w) = s(v, g(w)).$$

f heißt *linksadjungiert* zu g, g heißt *rechtsadjungiert* zu f.

Ist $V = W$ und $f = g$, so heißt f *selbstadjungiert*.

Beispiel. Sei V euklidischer Vektorraum und $f : V \to V$ selbstadjungiert im Sinne von 6 $\Leftrightarrow$ f selbstadjungiert im Sinne von 7.15.

Beispiel. Sei $s : V^* \times V \to K$ mit $(\alpha, V) \mapsto \alpha(v)$ kanonische Paarung, $V^* = \operatorname{Hom}_K(V, K)$.

$f : V \to V$ Endomorphismus $\Rightarrow$ dualer Endomorphismus $f^* : V^* \to V^*$, $\alpha \mapsto \alpha \circ f$.

f^* ist der adjungierte Endomorphismus zu f:

$$s(\alpha, f(v)) = \alpha(f(v)) = (\alpha \circ f)(v) = (f^*(\alpha))(v) = s(f^*(\alpha), v)$$

Bemerkung. Man schreibt f^* für den Linksadjungierten von f und g_* für den Rechtsadjungierten von g.

Lemma 7.16. *Seien V, W endlich-dimensional, $s : V \times W \to K$ nicht-ausgeartete Paarung., $f : V \to V$ Endomorphismus. Dann existiert ein eindeutig bestimmtes Rechtsadjungiertes $g : W \to W$. (Ebenso für $f' : W \to W$.)*

Beweis. Wir betrachten den Isomorphismus $s_1 : W \to V^*$, $w \mapsto s(\cdot, w)$.

$$\begin{tikzcd} W \arrow[r, "s_1", "\cong"'] \arrow[d] & V^* \arrow[d, "f^*"] \\ W \arrow[r, "\cong", "s_1"'] & V^* \end{tikzcd}$$

$g : W \to W$ definiert als ${s_1}^{-1} \circ f^* \circ s_1$.

Behauptung: g ist rechtsadjungiert zu f.

Zu zeigen: $s(f(v), w) = s(v, g(w))$.

$$s(v, g(w)) = s\left(v, {s_1}^{-1} f^* s_1(w)\right)$$

$$\begin{aligned} s_1(w) : V \to K, &\quad x \mapsto s(x, w) \\ f^*(s_1(w)) : V \to K, &\quad x \mapsto s(f(x), w) \end{aligned}$$

Was ist mit ${s_1}^{-1}$ von $f^* s_1(w)$? Sei $w' \in W$ das eindeutige Element mit $s_1(w') = f^* s_1(w)$.

$s_1(w') : V \to K$, $x \mapsto s(x, w')$, d. h. $s(x, w') = s(f(x), w)$ für alle $x \in V$. Nach Definition: $w' = g(w)$, also gilt $s(x, g(w)) = s(f(x), w)$.

Behauptung: g ist eindeutig.

Seien g, g' beide rechtsadjungiert zu f:

$$s(v, g(w)) = s(f(v), w) = s\left(v, g'(w)\right) \qquad \text{für alle } v \in V,\ w \in W$$

$\Rightarrow s(v, (g - g')(w)) = 0$ für alle $v \in V$, $w \in W$.

s ist nicht-ausgeartet, also: $(g - g')(w) = 0$ für alle $w \in W \Rightarrow g - g' = 0 \Rightarrow g = g'$. □

Ist $s : V \times V \to K$ Bilinearform, $f : V \to V$ Endomorphismus $\Rightarrow$ neue Bilinearform

$$s' : V \times V \to K, \qquad (x, y) \mapsto s(f(x), y)$$

oder

$$s'' : V \times V \to K, \qquad (x, y) \mapsto s(x, f(y))$$

Beispiel. Sei $V = K^n$ und betrachte $f : K^n \times K^n \to K$, $(x, y) \mapsto x^t y$ mit gegebener Matrix A. Dann: $s''(x, y) = x^t (Ay)$.

Lemma 7.17. *Sei s symmetrische, nicht-ausgeartete Bilinerform, $f : V \to V$ Endomorphismus, s' wie eben. Dann ist s' genau dann symmetrisch, wenn f selbstadjungiert ist.*

Beweis. Da s symmetrisch und selbstadjungiert ist, gilt:
$s'(v, w) = s(f(v), w) = s(v, f(w)) = s(f(w), v) = s'(w, v)$ □

7.1 Tensorprodukte

Wir studieren nun allgemeine bilineare Abbildungen

$$s : V \times W \to U, \qquad (V, W, U \ K\text{-Vektorräume}).$$

Wir wollen die Theorie der bilinearen Abbildungen auf die der linearen zurückführen.

Beispiel. V mit Basis $v_1, \ldots, v_n$, W mit Basis $w_1, \ldots, w_m$.

s ist eindeutig bestimmt durch die Vektoren $s(v_i, w_j) \in U$:

$v \in V$, $v = \sum a_i v_i$, $w = \sum b_j w_j \Rightarrow s(v,w) = \sum a_i b_j s(v_i, w_j)$, $a_i, b_j \in K$.

Die $s(v_i, w_j)$ sind beliebige Elemente von U. Diese $n \times m$-Vektoren in U definieren eine lineare Abbildung $M_{n\times m}(K) \xrightarrow{\tilde{s}} U$.

Standardbasis von $M_{n\times m}(K)$ sind die e_{ij} (alles Nullen, nur Eintrag an (i,j) ist 1.).

$$\tilde{s} : e_{ij} \mapsto s(v_i, w_j)$$

Ist $A = \left(a_{ij}\right)$, dann schreibe:

$$\tilde{s}(A) = \sum_{i,j} a_{ij} \tilde{s}(e_{ij}) = \sum_{i,j} a_{ij} s(v_i, w_j)$$

Problem: Das hängt von der Wahl der Basen ab. Andere Basen definieren eine andere Abbildung $\tilde{s}$ (explizite Formel).
Ziel: Konstruktion eines Vektorraums $V \otimes W$ ($\cong M_{n\times m}(K)$) und einer kanonischen Abbildung $V \otimes W \xrightarrow{\tilde{s}} U$.

Theorem 7.18. *Seien V, W K-Vektorräume. Dann gibt es einen Vektorraum $V \otimes W$ und eine bilineare Abbildung*

$$\theta : V \times W \to V \otimes W$$

mit der folgenden Eigenschaft: Jede bilineare Abbildung $V \times W \to U$ für einen Vektorraum U faktorisiert eindeutig als $V \times W \xrightarrow{\theta} V \otimes W \xrightarrow{\tilde{s}} U$ mit einer linearen Abbildung $\tilde{s}$.

Das Paar $(V \times W, \theta : V \times W \to V \otimes W)$ ist eindeutig bestimmt bis auf eindeutigen Isomorphismus (verträglich mit θ).

Beispiel. $M_{n\times m}(K)$ erfüllt die Bedingungen an $V \otimes W$:

$$\theta : V \times W \to M_{n\times m}(K), \qquad (v_i, w_j) \mapsto e_{ij}$$

Bemerkung (Allgemeine Notation). $\theta(x,y) = x \otimes y$

Beweis (Eindeutigkeit). Seien $(X, \theta : V \times W \to X)$ und $(Y, \varphi : V \times W \to Y)$ zwei Paare, die die Bedingungen des Theorems erfüllen.

(X, θ) ist ein Tensorprodukt, φ ist bilinear $\Rightarrow$ Es gibt eine lineare Abbildung $\tilde{\varphi} : X \to Y$ mit $\tilde{\varphi} \circ \theta = \varphi$.
(Y, φ) ist ein Tensorprodukt, θ ist bilinear $\Rightarrow$ Es gibt eine lineare Abbildung $\tilde{\theta} : Y \to X$ mit $\tilde{\theta} \circ \varphi = \theta$.

Behauptung: $\tilde{\varphi}$ und $\tilde{\theta}$ sind zueinander invers, d. h. $\tilde{\varphi} \circ \tilde{\theta} = \mathrm{Id}_Y$, $\tilde{\theta} \circ \tilde{\varphi} = \mathrm{Id}_X$.

$V \times W \xrightarrow{\theta} X \xrightarrow{\tilde{\varphi}} Y \xrightarrow{\tilde{\theta}} X$

$$\tilde{\theta} \circ (\tilde{\varphi} \circ \theta) = \tilde{\theta} \circ \varphi = \theta$$

$$(*) \qquad \left(\tilde{\theta} \circ \tilde{\varphi}\right) \circ \varphi = \mathrm{Id}_X \circ \theta$$

Betrachte das Tensorprodukt (X, θ) und die bilineare Abbildung $V \times W \to K$. Nach universeller Eigenschaft faktorisiert θ eindeutig als $\mathrm{Id}_X \circ \theta$. Nach $(*)$ hat auch $\tilde{\theta} \circ \tilde{\varphi}$ die Eigenschaft. Wegen der Eindeutigkeit folgt $\mathrm{Id}_X = \tilde{\theta} \circ \tilde{\varphi}$.

Ebenso für $\tilde{\varphi} \circ \tilde{\theta} = \mathrm{Id}_Y$. □

Beweis (Existenz). *Behauptung:* Es gibt $(X, \theta : V \times W \to X)$ mit der Eigenschaft des Theorems.

Sei $\tilde{X}$ der Vektorraum mit Basis alle Elemente von $V \times W$, bzw. für jedes Element $(v,w) \in V \times W$ gibt es einen Basisvektor $e_{(v,w)}$ in $\tilde{X}$.

$\Rightarrow$ Mengentheoretische Abbildung $\Phi : V \times W \to \tilde{X}$ mit $(v,w) \mapsto e_{(v,w)}$.

Ziel: $\theta(v_1 + v_2, w) = \theta(v_1, w) + \theta(v_2, w) \Leftrightarrow \theta(v_1 + v_2, w) - \theta(v_1, w) - \theta(v_2, w) = 0$

Sei $\tilde{K} \subset \tilde{X}$ der Untervektorraum, der erzeugt wird von allen Elementen der Form

(i) $\Phi(\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2, w) - \lambda_1 \Phi(v_1, w) - \lambda_2 \Phi(v_2, w)$ für $\lambda_1, \lambda_2 \in K$, $v_1, v_2 \in V$, $w \in W$

(ii) $\Phi(v, \mu_1 w_1 + \mu_2 w_2) - \mu_1 \Phi(v, w_1) - \mu_2 \Phi(v, w_2)$ für $\mu, \mu_2 \in K$, $v \in V$, $w_1, w_2 \in W$

Definiere $X = \tilde{X}/\tilde{K}$:

$$X \times W \xrightarrow{\Phi} \tilde{X} \xrightarrow{\pi} \tilde{X}/\tilde{K}, \qquad (v, w) \mapsto e_{v,w} + \tilde{K}$$

18.05.

Zu zeigen: (X, θ) hat die richtigen Eigenschaften.

- X ist ein Vektorraum. ✓
- θ ist bilinear:

$$\theta(\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2, w) = \pi\Phi(\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2, w)$$

$$\lambda_1 \theta(v_1, w) + \lambda_2 \theta(v_2, w) = \pi(\lambda_1 \Phi(v_1, w) + \lambda_2 \Phi() v_2, w)$$

Die beiden Ausdrücke sind gleich, da $\Phi(\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2, w) - \lambda_1 \Phi(v_1, w) - \lambda_2 \Phi(v_2, w) \in \tilde{K}$. Genauso im zweiten Argument.

- Sei $s : V \times W \to U$ bilinear:

$$\begin{tikzcd}
V \times W \arrow[rr, "s"] \arrow[dr, "\Phi"'] & & U \\
& \tilde{X} \arrow[ur] \arrow[dr] & \\
& & \tilde{X}/\tilde{K} \arrow[uu, "\tilde{s}"']
\end{tikzcd}$$

$s' : \tilde{X} \to U$ mit $e_{(v,w)} \mapsto s(v, w)$ definiert eine bilineare Abbildung, da die $e_{(v,w)}$ Basis von $\tilde{X}$.

$$\tilde{s}\left(e_{(v,w)} + \tilde{K}\right) := s\left(e_{(v,w)}\right) = s(v, w)$$

Dies ist wohldefiniert genau dann, wenn $s'\left(\tilde{K}\right) = 0$.

Sei $\Phi(\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2, w) - \lambda_1 \Phi(v_1, w) - \lambda_2 \Phi(v_2, w)$ einer der Erzeuger von $\tilde{K}$. Dann gilt

$$\begin{aligned}
& s'(\Phi(\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2, w) - \lambda_1 \Phi(v_1, w) - \lambda_2 \Phi(v_2, w)) \\
&= s'(\Phi(\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2, w)) - s'(\lambda_1 \Phi(v_1, w)) - s'(\lambda_2 \Phi(v_2, w)) \\
&= s(\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2, w) - \lambda_1 s(v_1, w) - \lambda_2 s(v_2, w) && \text{nach Definition von } s' \\
&= 0 && \text{da } s \text{ bilinear}
\end{aligned}$$

Ebenso für den zweiten Typ von Erzeugern.

Es gilt:

$$\tilde{s}(\theta(v, w)) = \tilde{s}(\pi\Phi(v, w)) = \tilde{s}\left(e_{(v,w)} + \tilde{K}\right) = s(v, w)$$

Eindeutigkeit von $\tilde{s}$: Auf jeden Fall $\tilde{s}\theta(v, w) = s(v, w)$, also $\tilde{s}\left(e_{(v,w)} + \tilde{K}\right) = s(v, w)$. Das bestimmt $\tilde{s}$ bereits eindeutig.

□

Rechenregeln 7.19. Sei $\otimes : V \times W \to V \otimes W$ ein Tensorprodukt. Dann gilt:

a) $\lambda(v \otimes w) = (\lambda v) \otimes w = v \otimes (\lambda w)$ für alle $v \in V$, $w \in W$, $\lambda \in K$.

b) $(v_w + v_2) \otimes w = v_1 \otimes w + v_2 \otimes w$

c) $v \otimes (w_1 + w_2) = v \otimes w_1 + v \otimes w_2$

Beweis. $\theta : V \times W \to V \otimes W$ ist bilinear. Es gilt:

$$\underbrace{\theta(\lambda v, w)}_{=(\lambda v) \otimes w} = \underbrace{\lambda \otimes (v, w)}_{\lambda(v \otimes w)} = \underbrace{\theta(v, \lambda w)}_{v \otimes (\lambda w)}$$

Rest genauso. □

Bemerkung.

– Für $v_1 \otimes w_1 + v_2 \otimes w_2 =?$ gibt es keine Rechenregeln!

– Nicht jedes Element von $V \otimes W$ hat die Form $v \otimes w$ ($\leftarrow$ Elementartensoren)!

Allgemeine Form: $\sum_{i=1}^{n} v_i \otimes w_i$ mit $n \in \mathbb{N}$, $v_i \in V$, $w_i \in W$.

Korollar 7.20. *Seien $f : V \to V'$, $g : W \to W'$ linear. Dann gibt es genau eine lineare Abbildung*

$$f \otimes g : V \otimes W \to V' \otimes W', \qquad (f \otimes g)(v \otimes w) = f(v) \otimes g(w) \qquad \text{für alle } v \in V,\ w \in W,$$

d. h.

$$\begin{tikzcd}
V \times W \arrow[r, "{(f,g)}"] \arrow[d] & V' \times W' \arrow[d] \\
V \otimes W \arrow[r, "f \otimes g"'] & V' \otimes W'
\end{tikzcd}$$

kommutiert.

Beweis. Die Abbildung $V \times W \to V' \times W' \to V' \otimes W'$ ist bilinear:

$$\begin{aligned}
(\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2, w) &\mapsto (f(\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2), g(w)) \\
&= (\lambda_1 f(v_1) + \lambda_2 f(v_2), g(w)) \\
&\mapsto \lambda_1 f(v_1) \otimes g(w) + \lambda_2 f(v_2) \otimes g(w)
\end{aligned}$$

Nach der universellen Eigenschaft des Tensorproduktes gibt es eine eindeutige Abbildung $V \otimes W \to V' \otimes W'$. Dies ist die Behauptung. $\square$

Lemma 7.21. *Es gibt genau eine lineare Abbildung $V \otimes K \to V$, mit $v \otimes c \mapsto cv$, $v \in V$, $c \in K$. Diese ist ein Isomorphismus.*

Beweis. $V \times K \to V$ mit $(v, c) \mapsto cv$ ist bilinear. Nach universeller Eigenschaft von $V \otimes K$ gibt es dann eine eindeutige Abbildung $V \otimes K \to V$:

$$\begin{tikzcd}
(v,c) \arrow[rr, mapsto] \arrow[dr, mapsto] & & cv \\
& v \otimes c \arrow[ur, mapsto] &
\end{tikzcd}$$

Noch zu zeigen:

(i) Surjektivität: Jedes $v \in V$ ist Bild von $v \otimes 1$.

(ii) Injektivität: Sei $\sum_{i=1}^{n} v_i \otimes c_i \in \ker(V \otimes K \to V)$, $v_i \in V$, $c_i \in K$. Dann gilt:

$$\sum_{i=1}^{n} v_i \otimes c_i = \sum_{i=1}^{n} (c_i v_i) \otimes 1 = \left(\sum_{i=1}^{n} c_i v_i \right) \otimes 1 = 0 \otimes 1,$$

denn $\sum_{i=1}^{n} c_i \otimes v_i \in \ker(V \otimes K \to V) \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{n} c_i v_i = 0$. $\square$

Satz 7.22. *Seien $B_1 \subset V$ und $B_2 \subset W$ Teilmengen. Dann gilt:*

1. *B_1, B_2 linear unhängig $\Rightarrow B_1 \otimes B_2 = \{b_1 \otimes b_2 : b_1 \in B_1, b_2 \in B_2\}$ linear unabhängig.*
2. *B_1, B_2 Erzeugendensysteme $\Rightarrow B_1 \otimes B_2$ Erzeugendensystem von $V \otimes W$.*
3. *B_1, B_2 Basen $\Rightarrow B_1 \otimes B_2$ Basis.*

Beweis. Zu 2.: Wir betrachten die Konstruktion von $V \otimes W$. $\tilde{X} \to X = V \otimes W$. Jedes Element von $V \otimes W$ hat die Form $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i \otimes w_i$ ($n \in \mathbb{N}$, $\lambda_i \in K$, $v_i \in V$, $w_i \in W$), d. h. $V \otimes W$ wird erzeugt von Elementartensoren $v \otimes w$.

Nach Voraussetzung gilt $v = \sum_{j=1}^{m} \alpha_j b_j$ ($b_j \in B_1$, $\alpha_j \in K$) und $w = \sum_{k=1}^{p} \beta_k c_k$ ($c_k \in B_2$, $\beta_j \in K$).

Also gilt:

$$v \otimes w = \left(\sum \alpha_j b_j\right) \otimes \left(\sum \beta_k c_k\right) = \sum_{j,k} \alpha_j \beta_k \underbrace{(b_j \otimes c_k)}_{\in B_1 \otimes B_2}$$

Dies zeigt 2..

Zu 1.: Sei $\sum_{i=1}^{n} a_i v_i \otimes w_i = 0$ mit $a_i \in K$, $v_i \in B_1$, $w_i \in B_2$. Zu zeigen: $a_i = 0$. Sackgasse!

Stattdessen mit der universellen Eigenschaft: Seien $v_{i_0} \in B_1$, $w_{j_0} \in B_2$ fest.

Sei $f_{i_0} : V \to K$ mit $f_{i_0}(v_{i_0}) = 1$, $f_{i_0}(v_i) = 0$ für $v_i \in B_1 \setminus \{v_{i_0}\}$ (existiert nach Basisergänzungssatz).

Sei $g_{j_0} : W \to K$ mit $g_{j_0}(w_{j_0}) = 1$, $g_{j_0}(w_j) = 0$ für $w_j \in B_2 \setminus \{w_{j_0}\}$.

Nach 7.20 sind diese Abbildungen bilinear: $f_{i_0} \otimes g_{j_0} : V \otimes W \to K \otimes K \overset{7.21}{\cong} K$:

$$v_i \otimes w_j \mapsto f_{i_0}(v_i) \otimes g_{j_0}(w_j) \mapsto f_{i_0}(v_i) \cdot g_{j_0}(w_j) = \begin{cases} 1 & v_1 = v_{i_0}, w_j = w_{j_0} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Wende $f_{i_0} \otimes g_{j_0}$ auf Voraussetzung an:

$$0 = \sum_{i=1}^{n} a_i \underbrace{f_{i_0} \otimes g_{j_0}(v_i \otimes w_j)}_{0 \text{ oder } 1} = a_{i_0} \qquad \text{wobei } v_i = v_{i_0},\ w_i = w_{j_0}$$

Dies gilt für alle Paare v_{i_0}, w_{j_0}. Also verschwinden alle Koeffizienten.

1. $\wedge$ 2. $\Rightarrow$ 3. □

Bemerkung. Vieles von dem, was wir in der Linearen Algebra sagen, funktioniert auch mit Ringen statt Körpern, so z. B. alles, was wir über das Tensorprodukt gesagt haben.

Korollar 7.23. *Sei* $\dim V = n$, $\dim w = m$. *Dann ist* $\dim V \otimes W = n \cdot m$.

Beweis. Ist $e_1, \dots, e_n$ Basis von V, $f_1, \dots, f_m$ Basis von W. Dann ist nach 7.22 $e_i \otimes f_j$ für $i = 1, \dots, n$, $j = 1, \dots, m$ eine Basis von $V \otimes W$. □

Satz 7.24. *Seien U, V, W Vektorräume. Dann gilt:*

1. *Es gibt genau eine lineare Abbildung*

$$V \otimes W \to W \otimes V, \qquad v \otimes w \mapsto w \otimes v$$

für alle $v \in V$, $w \in W$. Diese ist ein Isomorphismus. (Kommutativität)

2. *Es gibt genau eine lineare Abbildung*

$$U \otimes (V \otimes W) \xrightarrow{\cong} (U \otimes V) \otimes W, \qquad u \otimes (v \otimes w) \mapsto (u \otimes v) \otimes w$$

für alle $u \in U$, $v \in V$, $w \in W$. (Assoziativität)

3. *Es gibt genau eine lineare Abbildung*

$$U \otimes (V \oplus W) \xrightarrow{\cong} (U \otimes V) \oplus (U \otimes W), \qquad u \otimes (v, w) \mapsto (u \otimes v, u \otimes w)$$

für alle $u \in U$, $v \in V$, $w \in W$. (Distributivität)

Beweis. Zu 1.: Die Abbildung $V \times W \to W \times V \to W \otimes V$ mit $(v,w) \mapsto (w,v) \mapsto w \otimes v$ ist bilinear. Nach universeller Eigenschaft faktorisiert sie über eine lineare Abbildung $V \otimes W \to W \otimes V$ mit $v \otimes w \mapsto w \otimes v$.

Wir verknüpfen $V \otimes W \to W \otimes V \to V \otimes W$, $v \otimes w \mapsto w \otimes v \mapsto v \otimes w$, d. h. Identität auf Elementartensoren. Diese erzeugen $V \otimes W$. Die beiden Abbildungen sind invers zueinander.

Zu 2. Analog mit $U \times V \times W \to U \otimes (V \otimes W)$ **19.05.**

Zu 3.: Die Abbildung $U \times (V \oplus W) \to (U \otimes V) \oplus (U \otimes W)$ mit $(u,(v,w)) \mapsto (u \otimes v, u \otimes w)$ ist bilinear. Nach der universellen Eigenschaft des Tensorproduktes gibt es eine eindeutige lineare Abbildung

$$U \otimes (V \oplus W) \to (U \otimes V) \oplus (U \otimes W)$$

mit der angegebenen Eigenschaft.

Betrachte $i_1 : V \to V \oplus W$ mit $v \mapsto (v,0)$ und $i_2 : W \to V \oplus W$ mit $w \mapsto (0,w)$. Wegen der Funktionalität des Tensorproduktes ergeben sich Abbildungen $\mathrm{Id} \otimes i_1 : U \otimes V \to U \otimes (V \oplus W)$ und $\mathrm{Id} \otimes i_2 : U \otimes W \to U \otimes (V \oplus W)$. Zusammen erhält man die lineare Abbildung

$$(\mathrm{Id} \otimes i_1, \mathrm{Id} \otimes i_2) : (U \otimes V) \oplus (U \otimes W) \to U \otimes (V \oplus W), \qquad (x,y) \mapsto \mathrm{Id} \otimes i_1 (x) + \mathrm{Id} \otimes i_2 (y).$$

Die beiden Abbildungen sind zueinander invers.

$$\begin{aligned} u \otimes (v,w) \mapsto (u \otimes v, u \otimes w) &\mapsto \mathrm{Id} \otimes i_1 (u \otimes v) + \mathrm{Id} \otimes i_2 (u \otimes w) \\ &= u \otimes i_1 (v) + u \otimes i_2 (w) = u \otimes (v,0) + u \otimes (0,w) = u \otimes (v,w) \end{aligned}$$

Diese Elemente erzeugen den ganzen Raum. $\Rightarrow$ Komposition ist die Identität. Zweite Komposition genauso. □

Bemerkung.

$$V \otimes K^n = V \otimes \left(\bigoplus_{i=1}^n K \right) = (V \otimes K) \oplus \ldots \oplus (V \otimes K) = \bigoplus_{i=1}^n V \otimes K \cong \bigoplus_{i=1}^n V = V^n$$

Also: $K^m \otimes K^n \cong (K^m)^n \cong K^{mn}$.

Beispiel. Sei V ein $\mathbb{R}$-Vektorraum. $\mathbb{C}$ ist ein $\mathbb{R}$-Vektorraum.

$V_{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} V$ ist ein $\mathbb{R}$-Vektorraum der Dimension $2 \dim_{\mathbb{R}} V$. Mit der skalaren Multiplikation

$$\mathbb{C} \times V_{\mathbb{C}} \to V_{\mathbb{C}}, \qquad (\lambda, c \otimes v) \mapsto (\lambda c) \otimes v \qquad \text{für } \lambda, c \in \mathbb{C},\ v \in V$$

wird $V_{\mathbb{C}}$ zu einem $\mathbb{C}$-Vektorraum. (Beweis als Übungsaufgabe.)

Sei jetzt $V = \mathbb{R}^n$. Dann ist $V_{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \otimes \mathbb{R}^n \cong \mathbb{C}^n$ als $\mathbb{C}$-Vektorräume. Diese Vektorräume haben wir bereits benutzt, um Sätze über $\mathbb{R}$ aus Sätzen über $\mathbb{C}$ herzuleiten ($\to$ Lemma 6.17 für Hauptachsentransformation auf Seite 21 und Cayley-Hamilton auf Seite 11, dort: $V_{\bar{K}} = \bar{K} \otimes_K V$ als $\bar{K}$-Vektorraum).

$\mathbb{R} \to \mathbb{C}$ induziert $V \to V_{\mathbb{C}}$ ($\mathbb{R}$-lineare Inklusion).

Satz 7.25 (Exaktheit). *Sei $f : V \to V'$ linear, W ein Vektorraum. Wir betrachten $f \otimes \mathrm{Id} : V \otimes W \to V' \otimes W$.*

a) $\operatorname{im}(f \otimes \mathrm{Id}) \cong (\operatorname{im} f) \otimes W$.

b) $\ker(f \otimes \mathrm{Id}) \cong (\ker f) \otimes W$.

Beweis. Zu a): $V \otimes W$ wird erzeugt von $v \otimes w$ für $v \in V$, $w \in W$. $\Rightarrow \operatorname{im}(f \otimes \mathrm{Id})$ wird von $(f \otimes \mathrm{Id})(v \otimes w) = f(v) \otimes w$ für $v \in V$, $w \in W$ erzeugt.

$(\operatorname{im} f) \otimes W$ wird erzeugt von $v' \otimes w$ mit $v' \in \operatorname{im} f \subset V'$ bzw. $v' = f(v)$ für $v \in V$.

Zu b): Sei $\dim V = n, \dim W = m < \infty$. Dann ist $\dim V = \dim \operatorname{im} f + \dim \ker f$ und

$$nm = \dim V \otimes W = \dim \operatorname{im}(f \otimes \mathrm{Id}) + \dim \ker(f \otimes \mathrm{Id}) = \dim \operatorname{im} f \otimes \underbrace{\dim W}_{m} + \dim \ker(f \otimes \mathrm{Id})$$

Also gilt:

$$(\dim \ker f) \dim W = \dim \ker(f \otimes \mathrm{Id}) = \dim \ker f \otimes W,$$

d. h. die beiden Räume in b) haben die selbe Dimension.

Ferner:

$$\begin{tikzcd} \ker f \otimes W \arrow[r] \arrow[dr, "0"'] & V \otimes W \arrow[d, "f\otimes \mathrm{Id}"] \\ & V' \otimes W \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} v \otimes w \arrow[r, mapsto] \arrow[dr, mapsto] & v \otimes w \arrow[d, mapsto] \\ & f(v) \otimes w = 0 \end{tikzcd} \qquad v \in \ker f$$

d. h. $\ker f \otimes W \subset \ker f \otimes \mathrm{Id}$. Die Räume haben die gleiche Dimension. $\Rightarrow$ Stimmen überein: $\ker(f \otimes \mathrm{Id}) \cong (\ker f) \otimes W$

Allgemeiner Fall: Sei $\sum\limits_{i=1}^{n} a_i v_i \otimes w_i \in \ker(f \otimes \mathrm{Id})$.

Betrachte $V_0 = \langle v_1, \ldots, v_n \rangle$ und $W_0 = \langle w_1, \ldots, w_n \rangle$. Das sind endlich-dimensionale Vektorräume. $f|_{V_0} : V_0 \to V'$. Dann folgt für den endlich-dimensionalen Fall:

$$\ker\left(f \otimes \mathrm{Id}|_{V_0 \otimes W_0}\right) = \left(\ker f|_{V_0}\right) \otimes W_0 \subset \ker f \otimes W$$

Außerdem:

$$\sum_{i=1}^{n} a_i v_i \otimes w_i \in \ker f \otimes \mathrm{Id}|_{V_0 \otimes W_0} \Rightarrow \sum_{i=1}^{n} a_i v_i \otimes w_i \in \ker f \otimes W$$

Also: $\ker(f \otimes \mathrm{Id}) \subset (\ker f) \otimes W$. □

Bemerkung. Tensorprodukt über Ringe: a) ist okay, aber b) im Allgemeinen falsch.

7.2 Tensoren in der Physik

Definition 7.26. Sei V ein endlich-dimensioner Vektorraum. Ein (r, s)-*Tensor* ist ein Element von

$$\underbrace{V \otimes V \otimes \ldots \otimes V}_{r \text{ mal}} \otimes \underbrace{V^* \otimes V^* \otimes \ldots \otimes V^*}_{s \text{ mal}}.$$

Er heißt *r-fach kovariant* und *s-fach kontravariant*.

Wahl einer Basis für V und die duale Basis für V^* induziert eine Basis für $V^{(r,s)}$ und daher Koordinaten

$$\sum_{\substack{i_1, \ldots, i_r \\ j_1, \ldots, j_s}} a^{i_1, \ldots, i_r}_{j_1, \ldots, j_s} e_{i_1} \otimes \ldots \otimes e_{i_r} \otimes e^*_{j_1} \otimes \ldots \otimes e^*_{j_s}.$$

Bemerkung (Einstein-Konvention). $a^{i_1, \ldots, i_r}_{j_1, \ldots, j_s} e_{i_1} \otimes \ldots \otimes e^*_{j_s}$ und über doppelte Indizes wird summiert. Manchmal auch nur $a^{i_1, \ldots, i_r}_{j_1, \ldots, j_s}$.

Beispiel. $(1, 1)$-Tensor entspricht $f : V \to V$ (siehe Übungsaufgaben).

Basiswechsel für V induziert Transformationsformel für $\left(a^{i_1, \ldots, i_r}_{j_1, \ldots, j_s}\right)$. Hierbei werden ko- und kontravarinte Indizes verschieden behandelt.

Oft ist $V = \mathbb{R}^3$ (Koordinaten eines Partikels im Raum) oder $\mathbb{R}^{3n}$ (Koordinaten von n Partikeln im Raum). Basiswahl entspricht der Koordinatenwahl im Raum. Oft werden krummlinige Koordinaten benutzt.

$\to$ Theorie der Mannigfaltigkeiten.

8 Affine und projektive Geometrie

Sei K ein Körper. Wir fassen K^2 als Ebene auf.

Definition 8.1. Die Elemente von K^2 heißen *Punkte*.

Eine *Gerade* ist eine Teilmenge $L \subset K^2$ von der Form

$$\{x_0 + tx_1 : t \in K\}, \qquad x_0 \in K^2,\ x_1 \in K^2 \setminus \{0\}$$

Eigenschaften 8.2.

1. *Durch zwei verschiedene Punkte gibt es genau eine Gerade.*
2. *Zwei Geraden schneiden sich in genau einem oder keinem Punkt (*Parallelen*).*
3. Gegeben seien eine Gerade L und ein Punkt $P \notin L$. Dann gibt es genau eine Parallele zu L durch P. (Parallelenaxiom)

Beweis. Lineare Algebra. Z. B.: Die Menge der Geraden durch $P \in K^2$ ist

$$\{L_x : x \in K^2 \setminus \{0\}\} \qquad \text{wobei } L_x = \{P + tx : t \in K\}$$

$Q \in L_x \Leftrightarrow Q = P + tx$ für ein $t \in K \Leftrightarrow Q - P = tx$ für ein $t \in K$.

Für $P \neq Q$ liegen sie beide auf $t = 1$, $x = Q - P$. Dies ist eindeutig, da $L_{tx} = L_x$ für alle $t \in K \setminus \{0\}$. □

8.1 Affine Räume

Definition 8.3 (allgemein). Ein *affiner Raum* über einem Vektorraum V ist eine Menge $A \neq \emptyset$ zusammen mit einer Abbildung

$$V \times A \to A, \qquad (v, P) \mapsto P + v,$$

so dass gilt:

1. $P + (v_1 + v_2) = (P + v_1) + v_2$ für alle $P \in A$, $v_1, v_2 \in V$.
2. Für $P, Q \in A$ gibt es einen eindeutigen Vektor $v \in V$ mit $Q = P + v$. Wir schreiben $v = \overrightarrow{PQ}$.

Bemerkung. Aus 1. und 2. folgt $0 + P = P$.

Beweis. Sei P beliebig, P_0 fest, dann ist nach 2.: $P = P_0 + v$, $v \in V$.
Es gilt dann: $P + 0 = (P_0 + v) + 0 = P_0 + (v + 0) = P_0 + v = P$ □

Die *Dimension* von A ist die Dimension von V:

– 0-dimensionale affine Räume haben nur ein Element. Sie heißt *Punkte*.

– 1-dimensionale affine Räume heißen *Geraden*.

– 2-dimensionale affine Räume heißen *Ebenen*.

Beispiel. Sei $A = K^n$, $V = K^n$ und $K^n \times K^n \to K^n$ die Addition von Vektoren.

Definition 8.4. Sei A affiner Raum über dem Vektorraum V. Eine Teilmenge $H \subset A$ heißt *affiner Teilraum*, falls es einen Untervektorraum $U \subset V$ gibt, so dass

$$\begin{array}{ccc} U \times H & \longrightarrow & H \\ \big\downarrow & & \big\downarrow \\ V \times A & \longrightarrow & A \end{array}$$

die Bedingung 2. eines affinen Raums erfüllt.

H heißt *Hyperebene*, falls $\dim H = \dim A - 1$.

Lemma 8.5. *Die affinen Teilräume $H \subset A$ haben die Form $H = U + P$ für ein $P \in A$ und einen Untervektorraum $U \subset V$.*

Beweis. Mit

$$U \times (U+P) \to A, \qquad (u, v+P) \mapsto u + (v+P) = (u+v) + P \in U + P$$

ist also eine Abbildung $U \times H \to H$ definiert.

Seien $S, T \in H$, $S = u + P$, $T = v + P$ mit $u, v \in U$. Dann ist $(v-u) + (v+P) = (v+P)$, d.h. $\overrightarrow{ST}$ existiert in U und ist dort eindeutig, da eindeutig in V. Damit ist H ein affiner Teilraum.

Sei $H \subset A$ affiner Teilraum zum Untervektorraum $U \subset V$. Sei $P_0 \in H$ beliebig, aber fest, dann gilt $U + P_= \subset H$. Zu $Q \in H$ gibt es ein $u \in U$ mit $u + P_0 = Q$, d.h. $H \subset U + P_0$, also $H = U + P_0$ □

Definition 8.6. Zwei affine Teilräume $H_1, H_2 \subset A$ heißen *parallel*, wenn die zugehörigen Vektorräume ineinander enthalten sind ($U_1 \subset U_2$ oder $U_2 \subset U_1$).

Satz 8.7. *Parallele Teilräume haben entweder einen leeren Schnitt oder sie sind ineinander enthalten.*

Beweis. Seien H_1, H_2 parallel und $U_1 \subset U_2$. Sei $P \in H_1 \cap H_2$. Dann ist $H_1 = U_1 + P$, $H_2 = U_2 + P$, also $H_1 \subset H_2$. □

Bemerkung. Nicht parallele Teilräume können dennoch leeren Schnitt haben! Man denke z. B. an windschiefe Geraden im Raum.

Definition 8.8. Seien $H_1, H_2 \subset A$ affine Teilräume. Der von H_1 und H_2 *aufgespannte Teilraum* ist der kleinste affine Raum, der H_1 und H_2 entält. Wir schreiben dafür $H_1 + H_2$.

Beispiel. Zwei Punkte definieren eine Gerade.

Satz 8.9 (Dimensionsformel). *Seien $H_1, H_2 \subset A$ affine Teilräume mit den zugehörigen Untervektorräumen $U_1, U_2 \subset V$. Dann ist $H_1 \cap H_2$ entweder leer oder ein affiner Teilraum zu $U_1 \cap U_2$ und es gilt:*

$$\dim H_1 + \dim H_2 = \dim(H_1 + H_2) + \begin{cases} \dim H_1 \cap H_2 & H_1 \cap H_2 \neq \emptyset \\ \dim U_1 \cap U_2 - 1 & H_1 \cap H_2 = \emptyset \end{cases}$$

Beispiel.

1. $\dim H_1 - \dim H_2 = 0$ Es ist:

$$\dim(H_1 + H_2) = \begin{cases} 0 & H_1 = H_2 \\ 1 & H_1 \neq H_2 \text{ (aufgespannte Gerade)} \end{cases}$$

$$\dim H_1 \cap H_2 = \begin{cases} 0 & H_1 = H_2 \\ & \text{nicht definiert} \end{cases}$$

$$\dim U_1 \cap U_2 - 1 = -1$$

2. Seien $A = K^2$, H_1, H_2 Geraden. Dann ist:

$$1 + 1 = \underbrace{\dim H_1 + H_2}_{1 \text{ oder } 2} + \underbrace{\begin{cases} \dim H_1 \cap H_2 & H_1 \cap H_2 \neq \emptyset \\ \dim U_1 \cap U_2 - 1 & H_1 \cap H_2 = \emptyset \end{cases}}_{1 \text{ oder } 0}$$

1. Fall: $H_1 \cap H_2 \neq \emptyset$, $\dim H_1 + H_2 = 2 \Rightarrow \dim H_1 \cap H_2 = 0$
2. Fall: $H_1 \cap H_2 \neq \emptyset$, $\dim H_1 + H_2 = 1 \Rightarrow \dim H_1 \cap H_2 = 1$
3. Fall: $H_1 \cap H_2 = \emptyset$, $\dim U_1 \cap U_2 = 1 \Rightarrow \dim H_1 + H_2 = 2$
4. Fall: $H_1 \cap H_2 = \emptyset$, $\dim U_1 \cap U_2 = 0 \Rightarrow 2 = 3 + 0 - 1$ unmöglich!

Beweis. Sei $P \in H_1 \cap H_2$, $H - 1 = U_1 + P$, $H_2 = U_2 + P$, $H_1 \cap H_2 = (U_1 \cap U_2) + P$ (insbesondere ist $H_1 \cap H_2$ ein affiner Teilraum).

Es gilt $H_1 + H_2 = P + U_1 + U_2$ ($P + v \in H_1 + H_2$ für alle $v \in U_1$, $P + w \in H_1 + H_2$ für alle $w \in U_2 \Rightarrow P + v + w \in H_1 + H_2$ für alle $v \in U_1$, $w \in U_2$).

Aus der Linearen Algebra I ist die Dimensionsformel

$$\dim U_1 + \dim U_2 = \dim (U_1 + U_2) + \dim U_1 \cap U_2$$

bekannt. Sei nun $H_1 \cap H_2 = \emptyset$, $H_1 = P_1 + U_1$, $H_2 = P_2 + U_2$ (dabei $P_i \in H_i$, $U_i \subset V$). Dann ist $H_1 + H_2 = P_1 + U_1 + U_2 + K\overrightarrow{P_1P_2}$ mit $K\overrightarrow{P_1P_2} \subset V$ ein 1-dimensionaler Unterraum und es gilt:

$$\dim H_1 + H_2 = \dim \left(U_1 + U_2 + K\overrightarrow{P_1P_2}\right)$$

Falls $\overrightarrow{P_1P_2} \subset U_1 + U_2$, dann: $\overrightarrow{P_1P_2} = U_1 + U_2$

Sei $P' = P_1 + U_2 \in H_1$, dann ist $\overrightarrow{P'P_2} = U_2 \in U_2$, d. h. $P' = P_2 - U_2 \in H_2$. Das ist ein Widerspruch zu $H_1 \cap H_2 = \emptyset$, also gilt:

$$\dim U_1 + U_2 + K\overrightarrow{P_1P_2} = \dim (U_1 + U_2) + 1$$

Die Dimensionsformel für Untervektorräume liefert die Behauptung. □

Koordinatensysteme: Sei A affiner Raum über einem Vektorraum V der Dimension n. Die Wahl eines Koordinatensystems auf A ist die Wahl eines Basispunktes $P_0 \in A$ sowie eines Isomorphismus' $\varphi : V \xrightarrow{\cong} K^n$. $A \to V \xrightarrow{\varphi} K^n, Q \mapsto \overrightarrow{P_0Q}$ ist bijektiv.

Satz 8.10. *Es existiert kein Satz, Lemma, Korollar, Theorem und keine Definition mit der Nummer 8.10.*

Beweis. Bleibt als Übungsaufgabe. Beweisansätze bitte an `mathe@macdevil.net`. □

Lemma 8.11. *Sei $A = K^n$. Dann ist jeder affine Teilraum von der Form $\{x \in K^n : Mx = b\}$ für ein $b \in K^n$. Jedes inhomogene Gleichungssystem definiert einen affinen Teilraum.*

Beweis. Aus der Linearen Algebra I.

Rechentrick: Wir führen eine weitere Koordinate x_0 ein und betrachten

$$\begin{aligned} m_{11}x_1 + m_{12}x_2 + \ldots + m_{1n}x_n &= b_1x_0 \\ m_{21}x_1 + m_{22}x_2 + \ldots + m_{2n}x_n &= b_2x_0 \\ &\vdots \\ m_{r1}x_1 + m_{r2}x_2 + \ldots + m_{rn}x_n &= b_rx_0 \end{aligned}$$

$\Leftrightarrow M'x' = 0$, $x' \in K^{n+1}$, $x' = (x_0, \ldots, x_n)$, $M' = (-bM)$. Die Lösung von $M'x' = 0$ mit $x_0 = 1$ ist eine Lösung für $Mx = b$. Was bedeutet $x_0 = 1$ für $\lambda = 1$?

$M'x' = 0$ beschreibt einen affinen Teilraum des K^{n+1} mit $0 \in A'$, $A' \cap \{x_0 = 1\} = A = \{Mx = b\}$.

$A' \cap \{x_0 = 1\}$ ist eine andere Projektion von A' und K^n. Vorteil: A, B affine Teilräume $\Rightarrow A', B' \subset K^{n+1}$ mit $0 \in A' \cap B'$, d. h. $A' \cap B' \neq \emptyset$.

8.2 Der projektive Raum

Definition 8.12. Sei K ein Körper. Der *n-dimensionale projektive Raum* über K ist die Menge der Nullpunktsgeraden im K^{n+1}. Wir schreiben $\mathbb{P}^n(K)$, $\mathbb{P}^n_K$.

In der Differentialgeometrie: $\mathbb{P}^n_{\mathbb{R}} = \mathbb{R}P^n$, $\mathbb{P}^n_{\mathbb{C}} = \mathbb{C}P^n$
In der Funktionentheorie: $\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}} = \hat{\mathbb{C}}$

Allgemeiner: Ist V ein Vektorraum, so heißt $\mathbb{P}(V)$ = Menge der Nullpunktsgeraden in V *projektiver Raum* über V. ($\mathbb{P}\left(K^{n+1} = \mathbb{P}^n_K\right)$) und es ist

$$\dim \mathbb{P}(V) = \dim V - 1.$$

Homogene Koordinaten: Sei $x = (x_0, \dots, x_n) \in K^{n+1} \setminus \{0\}$. Dann definieren $0, x$ eine eindeutige Gerade in K^{n+1}, also einen Punkt des $\mathbb{P}^n_K$. Wir schreiben $[x_0 : x_1 : \dots : x_n] \in \mathbb{P}^n_K$.

$$[x_0 : \dots : x_n] = [y_0 : \dots : y_n] \Leftrightarrow \text{Es gibt ein } \lambda \in K^* = K \setminus \{0\} \text{ mit } x_i = \lambda y_i \text{ für } i = 0, \dots, n$$

01.06.

Beispiel.

1. Betrachte $\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}} = \left\{(x_0, x_1) \in \mathbb{C}^2 \setminus (0,0)\right\} / (x_0, x_1) \sim (\lambda y_0, \lambda y_1)$ für $\lambda \neq 0$

   Falls $x_0 \neq 0$: $(x_0, x_1) \sim \left(1, \frac{y_1}{y_0}\right)$. Es gilt: $[1 : y_1] = [1 : y_2] \Leftrightarrow y_1 = y_2$.
   Falls $x_0 = 0$: $(0, x_1) \sim (0, 1) \Rightarrow x_1 \neq 0$.

   Damit: $\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}} = \{[1 : y] : y \in \mathbb{C}\} \cup \{[0 : 1]\} = \mathbb{C} \cup \{\infty\} = \hat{\mathbb{C}}$ *Riemannsche Zahlenkugel* ($\rightarrow$ Funktionentheorie).
2. Betrachte $\mathbb{P}^1_{\mathbb{R}} = \left\{(x_0, x_1) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} :\right\} / \sim$.

   $x \neq 0$: $[x_0 : x_1] = \left[1 : \frac{x_1}{x_0}\right]$.
   $x = 0$: $[0 : x_1] = [0 : 1] = \infty$.
3. Betrachte $\mathbb{P}^2_{\mathbb{R}} = \left\{(x_0, x_1, x_2) \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}\right\} / \sim$ und $x = (x_0, x_1, x_2) \in \mathbb{R}^3$.

   $x \neq 0 \Leftrightarrow \|x\| \neq 0$, also gilt: $[x_0 : x_1 : x_2] = \left[\|x\|^{-1} x_0 : \|x\|^{-1} x_1 : \|x\|^{-1} x_2\right]$, d. h. jeder Punkt in $\mathbb{P}^2_{\mathbb{R}}$ hat homogene Koordinaten $[y_0 : y_1 : y_2]$ mit $\|y\| = 1$.

   $\left\{y \in \mathbb{R}^3 : \|y\| = 1\right\}$ = Oberfläche der Einheitskugel S^2.

   Seien $y, y' \in S^2$ mit $[y_0 : y_1 : y_2] = \left[y'_0 : y'_1 : y'_2\right]$, d. h. es gibt $\lambda \in \mathbb{R}$ mit $y_i = \lambda y'_i$ für $i = 0, 1, 2$. Also: $1 = \|y\| = \|\lambda y'\| = |\lambda| \, \|y'\| = |\lambda| \Rightarrow \lambda = \pm 1$, d. h. $\mathbb{P}^2_{\mathbb{R}}$ ist $S^2 / y \sim -y$.

   Dies ist das einfachste Beispiel für eine nichtorientierbare Fläche.

Sei $U \subset V$ Untervektorraum, $U \neq 0$. Dann ist jede Gerade in U eine Gerade in V, d. h. $\mathbb{P}(U) \subset \mathbb{P}(V)$.

Definition 8.13. $\mathbb{P}(U)$ heißt *projektiver Teilraum* von $\mathbb{P}(V)$. Seien H_1, H_2 projektive Teilräume. Der von H_1 H_2 *aufgespannte Teilraum* $H_1 + H_2$ ist der kleinste projektive Teilraum, der H_1 und H_2 enthält.

Satz 8.14. *Seien H_1, H_2 projektive Teilräume von $\mathbb{P}(V)$. Dann gilt:*

$$\dim H_1 + \dim H_2 = \dim (H_1 + H_2) + \dim H_1 \cap H_2 \qquad (\dim \emptyset = \dim \mathbb{P}(0) = -1)$$

Beweis. Seien $H_1 = \mathbb{P}(U_1)$, $H_2 = \mathbb{P}(U_2)$ für $U_1, U_2 \subset V$ Untervektorräume.

$H_1 + H_2 = \mathbb{P}(U_1 + U_2)$ (denn $H_1 \subset H_1 + H_2 \Rightarrow U_1 \subset$ Vektorraum, der $H_1 + H_2$ definiert. Für H_2 analog.)
$H_1 \cap H_2 = \mathbb{P}(U_1 \cap U_2)$

Es gilt:

$$\underbrace{\dim U_1}_{=\dim H_1 + 1} + \underbrace{\dim U_2}_{=\dim H_2 + 1} = \underbrace{\dim (U_1 + U_2)}_{=\dim (H_1 + H_2) + 1} + \underbrace{\dim U_1 \cap U_2}_{=\dim H_1 \cap H_2 + 1} \qquad \text{(Dimensionsformel für Vektorräume)}$$

$\Rightarrow$ Projektionsformel für projektive Teilräume. $\square$

Bemerkung. Ist $H_1 \cap H_2 = \emptyset$, dann ist $U_1 \cap U_2 = 0 \neq \emptyset$ mit $\dim \emptyset = \dim 0 - 1$ stimmt die Formel.

Beispiel. 1. Seien H_1, H_2 1-dimensional in $\mathbb{P}^2_K$. Dann gilt:

$$1 + 1 = \dim (H_1 + H_2) + \dim H_1 \cap H_2$$
$$2 = \begin{cases} 1 & + & 1 \\ 2 & + & 0 \end{cases}$$

Zwei verschiedene Geraden in der projektiven Ebene schneiden sich also in einem Punkt.

2. Seien H_1, H_2 Geraden in $\mathbb{P}^3_K$.

$$1+1 = \dim (H_1 + H_2) + \dim H_1 \cap H_2 = \begin{cases} 1+1 & H_1 = H_2 \\ 2+0 & H_1,\, H_2 \text{ in einer Ebene, aber verschieden} \Rightarrow H_1 \cap H_2 \text{ ein Punkt} \\ 3-1 & H_1,\, H_2 \text{ windschief} \Rightarrow H_1 \cap H_2 = \emptyset \end{cases}$$

3. Seien H_1, H_2 Geraden in $\mathbb{P}^4_K$.

$$1 + 1 = \dim (H_1 + H_2) + \dim H_1 \cap H_2 = \begin{cases} 1+1 \\ 2+0 \\ 3-1 \\ \cancel{4-2} \end{cases}$$

Zwei Geraden spannen eine Gerade, eine Ebene oder einen 3-dimensionalen projektiven Raum auf.

Was hat das mit affiner Geometrie zu tun?

Satz 8.15. *Sei V endlich-dimensional, $W \subset V$ ein Untervektorraum mit $\dim W = \dim V - 1$, $v_0 \in V \setminus W$. Dann ist die Abbildung $\varphi : W \to \mathbb{P}(V)$ mit $w \mapsto K(v_0 + w)$ (Gerade in V durch 0) injektiv, d. h. W kann als Teilmenge von $\mathbb{P}(V)$ aufgefasst werden. Es gilt $\mathbb{P}(V) \setminus \operatorname{im} \varphi = \mathbb{P}(W) \subset \mathbb{P}(V)$.*

Beweis. Seien $w, w' \in W$ mit $\varphi(w) = \varphi(w')$, d. h. $\underbrace{K(v_0 + w)}_{=\langle v_0 + w\rangle} = \underbrace{K(v_0 + w')}_{=\langle v_0 + w'\rangle}$ (als Teilmenge von V) $\Leftrightarrow$ Es gibt $\lambda \in K^*$ mit $v_0 + w = \lambda (v_0 + w') = \lambda v_0 + \lambda w' \Leftrightarrow (1 - \lambda) v_0 = \lambda w' - w \in W$

$v_0 \notin W$ nach Voraussetzung $\Rightarrow (1 - \lambda) v_0 = 0$. $v_0 \neq 0 \Rightarrow 1 - \lambda = 0 \Rightarrow 1 = \lambda$. Es gilt also $v_0 + w = v_0 + w' \Rightarrow w = w'$, d. h. die Abbildung ist injektiv.

Es gilt: $V = W + Kv_0$, da $\dim W + Kv_0 = \dim W + 1 = \dim V$. Sei $P \in \mathbb{P}(V)$ ein Punkt, d. h. $P = Kv \subset V$ für ein $v \in V \setminus \{0\}$.

Es gilt: $v = w + \alpha v_0$ mit $w \in W$, $\alpha \in K$.

1. Fall: $\alpha = 0$. Dann ist $Kv = Kw \in \mathbb{P}(W)$

2. Fall: $\alpha \neq 0$. $Kv = K\left(\alpha^{-1} v\right) = \varphi\left(\alpha^{-1} w\right) \in \operatorname{im} \varphi$, denn $v = w + \alpha v_0 \Leftrightarrow \alpha^{-1} v = \alpha^{-1} w + v_0$. □

Beispiel. Sei $V = K^{n+1}$. Dann ist $\mathbb{P}(V) = \mathbb{P}^n_K$. Sei $K^n \cong W = \left\{(x_0, \ldots, x_n) \in K^{n+1} : x_0 = 0\right\} \subset V$ (dabei $(x_1, \ldots, x_n) \mapsto (0, x_1, \ldots, x_n)$) und sei $v_0 = (1, 0, \ldots, 0) \in V \setminus W$.

Es gilt: $v_0 + (0, x_1, \ldots, x_n) = (1, x_1, \ldots, x_n)$. Die Abbildung

$$\varphi_0 : K^n \to \mathbb{P}^n_k, \qquad (x_1, \ldots, x_n) \mapsto [1 : x_1 : \ldots : x_n]$$

ist injektiv (Satz 8.15).

Nun gilt: $\mathbb{P}^n_K \setminus \varphi_0(K^n) = \left\{[0 : x_1 : \ldots : x_n] \in \mathbb{P}^n_K\right\} \cong \mathbb{P}^{n-1}_K$.

Noch konkreter: $n = 1$. Dann ist

$$\varphi_0 : K \to \mathbb{P}^1_k, \qquad x \mapsto [1 : x]$$

und $\mathbb{P}^1_K \setminus \varphi(K) = \underbrace{\{[0:1]\}}_{=\infty} \cong \mathbb{P}^0_K$ der unendlich ferne Punkt zu K.

Sei $n = 2$. Dann: $K^2 \hookrightarrow \mathbb{P}^2_K$ mit $(x, y) \mapsto [1 : x : y]$ und $\mathbb{P}^2_K \setminus K^2 = \left\{[0 : x : y] \in \mathbb{P}^2\right\} \cong \mathbb{P}^1_K$ unendlich ferne Gerade.

Sei $n = 3$: $K^3 \hookrightarrow \mathbb{P}^3$. $\mathbb{P}^3_K \setminus K^2$ unendlich ferne Ebene.

Parallele Geraden (in der Ebene) schneiden sich im Unendlichen.

$L_1, L_2 \subset K^2$ parallele Geraden. $L_1 \cap L_2 = \emptyset$. $K^2 \hookrightarrow \mathbb{P}^2_K$. Setze L_1, L_2 zu projektiven Geraden $\bar{L}_1, \bar{L}_2$ fort:

$$\bar{L}_1 \cap \bar{L}_2 = \{P\}$$

Also ist P der Schnitt von $\bar{L}_1, \bar{L}_2$ mit der unendlich fernen Geraden von $\mathbb{P}^2_K$. Das halten wir „mathematisch sauber“ im folgenden Satz fest.

Satz 8.16.

a) *Sei $\varphi_0 : K^n \to \mathbb{P}^n_K$ wie oben. Sei $H \subset K^n$ affiner Teilraum zum Untervektorraum $U \subset K^n \hookrightarrow K^{n+1}$. Dann gibt es einen eindeutig bestimmten projektiven Teilraum $\bar{H} \subset \mathbb{P}^n_K$ mit $\bar{H} \cap \varphi_0(K^n) = \varphi_0(H)$. Es gilt $\bar{H} \setminus \varphi(H) = \mathbb{P}(U)$.*

b) *Seien $L_1, L_2 \subset K^n$ parallele Geraden. Dann schneiden sich $\bar{L}_1$ und $\bar{L}_2$ in einem Punkt der unendlich fernen Hyperebene.*

c) *Jeder Punkt der unendlich fernen Hyperebene entspricht genau einer Menge von parallelen Geraden im K^n.*

02.06.

Beweis. Zu a): Sei $H = \{x \in K^n : Mx = b\}$, $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, $b \in K^r$, $M \in M_{r\times n}(K)$. Definiere:

$$\bar{H} = \left\{[x_0 : \ldots : x_n] \in \mathbb{P}^n_K : M'x' = 0\right\}, \qquad x' = \begin{pmatrix} x_0 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \qquad M' = \begin{pmatrix} -b & M \end{pmatrix}$$

Dann ist $[x'] = [\lambda x']$ für $\lambda \in K^*$. $\Rightarrow M'(\lambda x') = \lambda (M'x')$, also gilt $M'x' = 0 \Leftrightarrow M'(\lambda x') = 0$. $\bar{H}$ ist also wohldefiniert.

$$\bar{H} \cap K^n = \left\{[x_0 : \ldots : x_n] : M'x' = 0,\ x_0 = 1\right\} = \left\{[1 : x_1 : \ldots : x_n] : \begin{pmatrix} -b & M \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = 0\right\}$$

$$= \left\{(x_1, \ldots, x_n) : M \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = b\right\} = H$$

Eindeutigkeit: Sei $U \subset K^{n+1}$ ein Untervektorraum mit $\mathbb{P}(U) \cap K^n = H$.

$H \subset \mathbb{P}(U)$ bedeutet: $x = (x_1, \ldots, x_n)$ mit $Mx = b \Rightarrow [1 : x_1 : \ldots : x_n] \in \mathbb{P}(U) \Leftrightarrow (1, x_1, \ldots, x_n) \in U$. Also enthält U $x' = (1, x_1, \ldots, x_n)$ mit $M'x' = 0$. Sei jetzt $y' = (y_0, \ldots, y_n)$ mit $M'y' = 0$.

1. Fall: $y_0 \neq 0 \Rightarrow \frac{1}{y_0} y'$ ist ebenfalls eine Lösung $M'\left(\frac{1}{y_0} y'\right) = 0$. $\frac{1}{y_0} y' \in U \Rightarrow y' \in U$.

2. Fall: $y_0 = 0$: Sei $(1, x_1, \ldots, x_n)$ Lösung von $M'x' = 0$. Dann ist auch $x' + y'$ Lösung von $M'x' = 0$. Nach dem ersten Fall liegen x' und $x' + y'$ in U, also auch y'.

Insgesamt gezeigt: x' mit $M'x' = 0 \Rightarrow x' \in U$.

Sei $u \in U$.

1. Fall: $u_0 \neq 0$. Dann hat $\frac{1}{u_0} u' \in U$ die Form $(1, \ldots)$, d. h. $\left[\frac{1}{u_0} u'\right] \in \mathbb{P}(U) \cap K^n = H$, also $M'\left(\frac{1}{u_0} u'\right) = 0 \Rightarrow M'u' = 0$.

2. Fall: $u_0 = 0$. Addiere eine Lösung x' mit $x_0 \neq 0$. Dann erfüllt $u' + x' \in U$ die Bedingung des ersten Falls, also ist $M'(u' + x') = 0$. $M'x' = 0 \Rightarrow M'u' = 0$.

Also auch $U \subset \{x' : M'x' = 0\}$.

Behauptung: $\bar{H} \setminus H = \mathbb{P}(U)$. Eben gezeigt:

$$\bar{H} \setminus H = \left\{[0 : x_1 : \ldots : x_n] : M'x' = 0\right\} = \mathbb{P}(U)$$

Denn es gilt: $\begin{pmatrix} -b & M \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow M \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow x \in U.$ $\square$

Zu b): Seien $L_1 \neq L_2$ parallele Geraden, d. h. beides sind affine Räume zum selben (1-dimensionalen) Untervektorraum $U \subset K^n$. Ferner wissen wir: $\bar{L}_1 \cap \bar{L}_2$ enthält höchstens einen Punkt. Ein Schnittpunkt ist $\bar{L}_1 \setminus L_1 = \mathbb{P}(U) = \bar{L}_2 \setminus L_2$. ($U$ ist 1-dimensional, also ist $\mathbb{P}(U)$ ein Punkt.)

Der Schnittpunkt liegt in $\mathbb{P}_K^n \setminus K^n$. □

Zu c): Nach der Formel $\bar{L} \setminus L = \mathbb{P}(U)$ schneiden sich alle zu L parallelen Geraden in $\mathbb{P}(U)$.

Ein Punkt $P \in \mathbb{P}_K^n \setminus K^n$ ist ein 1-dimensionaler Untervektorraum von K^{n+1} mit 0-ter Koordinate 0, d. h. $U \subset K^n \hookrightarrow K^{n+1}$, $(x_1, \ldots, x_n) \mapsto (0, x_1, \ldots, x_n)$.

$U \subset K^n$ definiert eine Schar von Geraden. □

Bemerkung. Bisher:

$$\varphi_0 : K^n \hookrightarrow \mathbb{P}_K^n, \qquad x_1, \ldots, x_n \mapsto [1 : x_1 : \ldots : x_n]$$

Sei nun

$$\varphi_i : K^n \to \mathbb{P}_k^n, \qquad x_1, \ldots, x_n \mapsto [x_1 : \ldots : x_{i-1} : 1 : x_i : \ldots : x_n].$$

Dies ist injektiv nach Satz 8.15.

Satz 8.17. *Es gilt:*

$$\mathbb{P}_K^n = \bigcup_{i=0}^{n} \varphi_i(K^n)$$

Beweis. Sei $[x_0 : \ldots : x_n] \in \mathbb{P}_K^n$. Es gibt ein $x_i \neq 0$. Dann ist $[x_0 : \ldots : x_n] = \left[\frac{x_0}{x_i} : \ldots : \frac{x_n}{x_i}\right]$. An der Stelle i steht also $\frac{x_i}{x_i} = 1$, d. h. dieser Punkt ist $\varphi_i\left(\frac{x_0}{x_i}, \frac{x_1}{x_i}, \ldots, \frac{x_{i-1}}{x_i}, \frac{x_{i+1}}{x_i}, \ldots, \frac{x_n}{x_i}\right)$. □

Bemerkung. Die φ_i heißen *affine Karten* des $\mathbb{P}_K^n$. Sie machen $\mathbb{P}_\mathbb{R}^n$ (bzw. $\mathbb{P}_\mathbb{C}^n$) zu einer reellen (bzw. komplexen) Mannigfaltigkeit. Eine Mannigfaltigkeit ist ein topologischer Raum, der lokal aussieht wie eine offene Teilmenge des $\mathbb{R}^n$ (bzw. $\mathbb{C}^n$). Vorteil: $\mathbb{P}_\mathbb{R}^n$ (und $\mathbb{P}_\mathbb{C}^n$) sind kompakt.

Beispiel. Die reelle Kreislinie ist eine 1-dimensionale reelle Mannigfaltigkeit. („Sieht in einer Umgebung aus wie die reelle Zahlengerade.“) Die reelle Kugeloberfläche ist eine 2-dimensionale reelle Mannigfaltigkeit. („Sieht in einer Umgebung aus wie die reelle Ebene.“)

Lemma 8.18. *Seien* $[x_0 : x_1 : x_2], [y_0 : y_1 : y_n], [z_0 : z_1 : z_2] \in \mathbb{P}_K^2$. *Dann sind äquivalent:*

(i) *Die drei Punkte liegen auf einer Geraden.*

(ii) $(x_1, x_1, x_2), (y_1, y_1, y_2), (z_1, z_1, z_2)$ *sind linear abhängig in* K^3.

Beweis. Die Punkte des $\mathbb{P}_K^2$ sind Geraden im K^3, nämlich $K(x_1, x_1, x_2), K(y_1, y_1, y_2), K(z_1, z_1, z_2)$. Der von ihnen aufgespannt Teilraum im $\mathbb{P}_K^2$ ist $\mathbb{P}(U)$ mit $U = \langle (x_1, x_1, x_2), (y_1, y_1, y_2), (z_1, z_1, z_2) \rangle$.

$\dim U = 3 \Leftrightarrow$ Vektoren linear unabhängig bzw. $\dim U < 3 \Leftrightarrow$ Vektoren linear abhängig $\Leftrightarrow \dim \mathbb{P}(U) < 2$ □

Wir sagen, die Punkte sind *kolinear*.

Für $A = [a], B = [b] \in \mathbb{P}_K^2$ ist die Gerade AB durch die Punkte $\left\{[\lambda a + \mu b] : (\lambda, \mu) \in K^2 \setminus 0\right\}$ gegeben.

Satz 8.19 (Satz von Desargues). *Seien zwei Dreiecke $\triangle ABC$, $\triangle A'B'C'$ in der Ebene ($\mathbb{P}_K^2$) gegeben. Gehen die Verbindungsgeraden einander entsprechender Punkte durch einen gemeinsamen Schnittpunkt, so liegen die Schnittpunkte einander entsprechender Seiten auf einer Geraden.*

Beispiel. Dreiecke parallel $\Rightarrow$ Schnittpunkte liegen im Unendlichen, d. h. alle drei Schnittpunkte liegen auf der unendlich fernen Gerade.

Beweis (analytisch). Wir schreiben alle Punkte in projektiven Koordinaten, z. B. $[A]$ für die projektiven Koordinaten von A. Bezeichne die Geraden: $AA' : [\lambda_1 A + \mu_1 A']$, $BB' : [\lambda_2 B + \mu_2 B']$, $CC' : [\lambda_3 C + \mu_3 C']$.

Es gibt S in allen drei Geraden, d. h. es gibt $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \mu_1, \mu_2, \mu_3 \in K$, mit

$$[S] = [\lambda_1 A + \mu_1 A'] = [\lambda_2 B + \mu_2 B'] = [\lambda_3 C + \mu_3 C'] .$$

Daraus ergeben sich folgende Gleichungen:

$$\begin{aligned} K^3 \ni r_1 &= \lambda_1 A - \lambda_2 B = -\mu_1 A' + \mu_2 B' \\ r_2 &= \lambda_1 A - \lambda_3 C = -\mu_1 A' + \mu_3 C' \\ r_3 &= \lambda_2 B - \lambda_3 C = -\mu_2 B' + \mu_3 C' \end{aligned}$$

Voraussetzung: $[A] \neq [B] \neq [C]$ in $\mathbb{P}_K^2$ ($\triangle ABC$ ist ein echtes Dreieck). Dann folgt: $[r_1], [r_2], [r_3] \in \mathbb{P}_K^2$.

Der Punkt $[r_1]$ liegt auf der Geraden durch $[A]$ und $[B]$ und gleichzeitig auf der Geraden durch $[A]'$ und $[B]'$ ($[r_1]$ ist Schnittpunkt $c \cap c'$). Ebenso $[r_2] = b \cap b'$ und $[r_3] = a \cap a'$.

Behauptung ist, r_1, r_2, r_3 sind linear abhängig. Dies gilt, denn: $r_1 - r_2 + r_3 = 0$. □

15.06.

Bemerkung (Affine Fassung des Satzes von Desargues). Seien z. B. zwei Dreiecke $\triangle ABC$, $\triangle A'B'C'$ mit $a \parallel a'$, $b \cap b' = P_1 \neq \emptyset$, $c_1 \cap c' = P_2 \neq \emptyset$, $AA' \cap BB' \cap CC' \neq \emptyset$ gegeben. Dann ist die Gerade durch P_1 und P_2 ist parallel zu a, a'.

(Gerade $\bar{L}$ durch P_1, P_2 geht durch $\bar{a} \cap \bar{a'}$ auf der unendlich fernen Geraden genau dann, wenn $L \parallel a$, $L \parallel a'$.)

Beweis (geometrisch). Wir betrachten die 3-dimensionale Situation. Gegeben seien die Dreiecke $\triangle ABC$, $\triangle A'B'C'$ im Raum ($\mathbb{P}_K^3$), so dass $AA' \cap BB' \cap CC' \neq \emptyset$.

AA' und BB' schneiden sich $\Rightarrow A, A', B, B'$ liegen in einer Ebene. Ebenso A, A', C, C' in einer Ebene und B, B', C, C' in einer Ebene. S ist der Schnittpunkt dieser drei Ebenen.

$a \cap a' \in$ Ebene durch B, B', C, C'. $b \cap b' \in$ Ebene durch A, A', C, C'. $c \cap c' \in$ Ebene durch A, A', B, B'.

$\Rightarrow a \cap a' \neq \emptyset$ (da sich zwei Geraden in der projektiven Ebene in genau einem Punkt schneiden). Ebenso $b \cap b' \neq \emptyset$, $c \cap c' \neq \emptyset$.

$a \cap a'$ liegt in der Ebene durch ABC und auch in der Ebene durch $A'B'C'$. Ebenso für $b \cap b'$ und $c \cap c'$. Die beiden Ebenen schneiden sich in einer Geraden. Diese Schnittgerade enthält die drei Schnittpunkte $a \cap a'$, $b \cap b'$, $c \cap b'$. Insbesondere liegen sie auf einer Geraden. □

Der Beweis benutzt, dass ABC, $A'B'C'$ zwei *verschiedene* Ebenen sind, also gerade *nicht* die Aussage, um die es geht.

Erste Möglichkeit zur Behebung: $K = \mathbb{R}, \mathbb{C}$. Benutze das Stetigkeitsargument.

Zweite Möglichkeit: Schreibe ABC, $A'B'C'$ als Projektionen von 3-dimensionalen Dreiecken. Die gesuchte Gerade ist die Projektion der Schnittgeraden der 3-dimensionalen Situation.

Beweisansatz: Wir betten $\mathbb{P}_K^2 \subset \mathbb{P}_K^3$ ein: $[x_0 : x_1 : x_2] \mapsto [x_0 : x_1 : x_2 : 0]$. Wähle $Z \in \mathbb{P}_K^3 \setminus \mathbb{P}_K^2$. Verbinde CZ und wähle hieraus ein $\tilde{C} \neq C$. Das ergibt ein neues Dreieck $\triangle AB\tilde{C}$. Wähle ein $\tilde{C}'$ auf der Geraden ZC' und auf der Geraden durch S und $\tilde{C}$ usw.

Bemerkung. Der zweite Beweis arbeitet nur mit den Axiomen des projektiven Raumes. Die Axiome der projektiven Ebene genügen nicht!

Addition und Multiplikation auf K können rein geometrisch (in $\mathbb{P}_K^2$) definiert werden.

Es ist: $K \subset \mathbb{P}_K^1 = K \cup \{\infty\}$.

Addition: Wähle drei Geraden L, L', L_∞ in $\mathbb{P}_K^2$ (in allgemeiner Lage). Seien $P_\infty = L \cap L_\infty$, $P_0 = L \cap L'$ und $P_1 \in L$, $P_1' \in L'$ zwei weitere Punkte.

Seien $A, B \in L \setminus \{P_\infty\}$. Dann ist $AA' \parallel P_1 P_1'$ (bzw.: $P_1 P_1' \cap P_\infty = H$. Verbinde H mit A und schneide das mit L'.) Genauso $BB' \parallel P_1 P_1'$.

Dann ist $A + B$ der Punkt von L, so dass $A'B \parallel B' (A + B)$.

Multiplikation: A', B' wie oben. Sei P auf L', so dass $A'P_1 \parallel PA$. Dann ist AB der Punkt von L, so dass $P_1P_1' \parallel P\,(AB)$.

Definiert dies eine Körperstruktur auf $L \setminus \{P_\infty\}$? Assoziativität der Multiplikation ist äquivalent zum Satz von Desargues.

8.3 Affine Abbildungen

Definition 8.20. Seien A, A' affine Räume über den Vektorräumen V, V'. Eine *affine Abbildung* f besteht aus einem Paar $f = (f_{\text{lin}}, f_{\text{aff}})$, wobei $f_{\text{lin}} : V \to V'$ lineare Abbildung und $f_{\text{aff}} : A \to A'$ mengentheoretische Abbildung, so dass

$$\begin{tikzcd} V \times A \arrow[r, "+"] \arrow[d, "(f_{\text{lin}}, f_{\text{aff}})"'] & A \arrow[d, "f_{\text{aff}}"] \\ V' \times A' \arrow[r, "+"'] & A' \end{tikzcd}$$

kommutiert, d. h.

$$\begin{tikzcd} (v, P) \arrow[r, mapsto] \arrow[d, mapsto] & v + P \arrow[d, mapsto, "f_{\text{aff}}(v+P)"] \\ (f_{\text{lin}}(v), f_{\text{aff}}(P)) \arrow[r, mapsto] & f_{\text{lin}}(v) + f_{\text{aff}}(P) \end{tikzcd}$$

$f_{\text{aff}}(v + P) = f_{\text{lin}}(v) + f_{\text{aff}}(P)$

Lemma 8.21. *Eine affine Abbildung wird durch die zugrundeliegende Abbildung von Mengen eindeutig bestimmt.*

Beweis. $f_{\text{lin}}(V) = \overrightarrow{f_{\text{aff}}(P)\, f_{\text{aff}}(v + P)}$. □

Beispiel. $V = A = K^m$, d. h. $K^m \times K^m \xrightarrow{+} K^m$, $V' = A'K^n$. Betrachte $f = (f_{\text{lin}}, f_{\text{aff}}) : K^m \to K^n$ mit:

$$f_{\text{aff}}(x) = Mx + b, \qquad b \in K^n,\ M \in M_{n\times m}(K)$$
$$f_{\text{lin}}(v) = Mv$$

Es gilt: $f_{\text{lin}}(v) + f_{\text{aff}}(x) = Mv + Mx + b = M(v + x) + b = f_{\text{aff}}(v + x)$. Also ist f eine affine Abbildung.

Da f_{lin} eindeutig durch f_{aff} bestimmt ist, schreiben wir oft $f(x) = Mx + b$.

Lemma 8.22. *Jede affine Abbildung $K^m \to K^n$ ist von dieser Form.*

Beweis. $f_{\text{lin}} : K^m \to K^n$ ist linear. $\Rightarrow f_{\text{lin}}(v) = Mv$ für eine Matrix $M \in M_{n\times m}(K)$. $b = f_{\text{aff}}(0)$.

Behauptung: $f_{\text{aff}}(x) = Mx + b \Leftrightarrow f_{\text{aff}}(x) - b = Mx$.

Sei $x \in K^m$. Dann ist $x = \underbrace{x}_{\in V} + \underbrace{0}_{\in A}$. Dann ist $f_{\text{aff}}(x) = f_{\text{aff}}(x + 0) - b = f_{\text{lin}}(x) + f_{\text{aff}}(0) - b = Mx + b - b = Mx$. □

Bemerkung. $f : V \to W$ lineare Abbildung $\mathbb{P}(V) \to \mathbb{P}(W)$? Nur für $V \to W$ injektiv.

Definition 8.23. Sei V ein endlich-dimensionaler Vektorraum. Dann heißt

$$\check{\mathbb{P}}(V) = \text{Menge der } (\dim V - 1)\text{-dimensionalen Untervektorräume von } V$$

dualer projektiver Raum über V.

Lemma 8.24. $\mathbb{P}(V^*) \to \check{\mathbb{P}}(V)$, $[l : V \to K] \mapsto \ker l$ *ist wohldefiniert und bijektiv.*

Beweis. $[l] \in \mathbb{P}(V^*) \Rightarrow l \neq 0 \Rightarrow l$ ist surjektiv

Dimensionsformel: $\dim \ker l = \dim V - 1$, d. h. $\ker l \in \check{\mathbb{P}}(V)$

$[l] = [l'] \Leftrightarrow l = \lambda l$ für ein $\lambda \in K \Rightarrow \ker l = \ker \lambda l = \ker l'$. Die Abbildung ist somit wohldefiniert.

Surjektivität: $W \in \check{\mathbb{P}}(V)$. $W \subset V$. $\dim W = n - 1$ $(n = \dim V)$.

$\Rightarrow V/W$ 1-dimensional, d. h. es gibt einen Isomorphismus $\varphi : V/W \to K$.

$l : V \to V/W \xrightarrow{\varphi} K$ hat $\ker l = W$. Also $[l] \mapsto W$.

Injektivität: Seien $l, l' : V \to K$ mit $W = \ker l = \ker l' \neq V \Rightarrow l : V \to V/W \xrightarrow{\text{Iso.}} K$. (Eigenschaft von $V/\ker l$).

Genauso für $l' : V \to V/W \xrightarrow{\text{Iso.}} K$. Also existiert der Isomorphismus $\varphi : K \to K$, gegeben durch Multiplikation mit einem $\lambda \neq 0$, d. h. $l' = \lambda l \Rightarrow [l'] = [l]$. □

16.06.

Bemerkung. Konkret: $V = K^{n+1}$, $\mathbb{P}(V) = \mathbb{P}^n_K$, $a \in K^{n+1} : a = \begin{pmatrix} a_0 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$.

$$V^* = \operatorname{Hom}_K\left(K^{n+1}, K\right) = \{(a_0, \dots, a_n)\} : a_i \in K$$

$$(a_0, \dots, a_n) \begin{pmatrix} x_0 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = a_0 x_0 + \dots + a_n x_n$$

definiert eine Abbildung $K^{n+1} \to K$.

$$\mathbb{P}(V^*) = \{[a_0 : \dots : a_n] : a_i \in K, (a_0, \dots, a_n) \neq 0\}$$

Also ist:

$$\check{\mathbb{P}}(V) = \left\{W \subset K^{n+1} : \dim W = n\right\}$$

$$W = \left\{ \begin{pmatrix} x_0 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in K^{n+1} : a_0 x_0 + \dots + a_n x_n = 0 \right\}$$

Also: $\mathbb{P}(V)$, $P(V^*)$, $\check{\mathbb{P}}(V)$ werden jeweils durch $[a_0 : \dots : a_n]$ vollständig beschrieben.

Bemerkung. Noch konkreter: $n = 2$.

$$\mathbb{P}^2_K = \{[x_0 : x_1 : x_2] : x_i \in K, (x_0, x_1, x_2) \neq 0\} \cong \check{\mathbb{P}}\left(K^3\right) = \left\{W \subset K^3 : \dim W = 2\right\}$$

Jedes W mit $\dim 2$ definiert eine projektive Gerade in $\mathbb{P}^2_K$. (Nach Definition war eine projektive Gerade $\mathbb{P}(W) \subset \mathbb{P}(V)$, $\dim W = 2$.)

$\check{\mathbb{P}}\left(K^3\right) = \left\{L \subset \mathbb{P}^2_K : L \text{ Gerade}\right\}$.

8.4 Dualitätsprinzip

Punkte in $\mathbb{P}^2_K \leftrightarrow$ Geraden in P^2_K.

Beispiel (Die Umkehrung des Satzes von Desargues). Gegeben seien zwei Dreiecke in der Ebene, so dass die Schnittpunkte einander entsprechender Seiten auf einer Geraden liegen. Dann schneiden sich die Verbindungsgeraden einander entsprechender Ecken in einem Punkt.

Beweis. Anwendung des Dualitätsprinzips auf den Satz von Desargues. □

9 Kegelschnitte

Wir arbeiten weiter affin und projektiv und betten $K^n \hookrightarrow \mathbb{P}_K^n$ ein mit $(x_1, \ldots, x_n) \mapsto [1 : x_1 : \ldots : x_n]$.

Definition 9.1. Sei $F \in K[x_1, \ldots, x_n]$ ein Polynom in n Variablen, also:

$$F = \sum_{i_1,\ldots,i_n=0}^{N} a_{i_1,\ldots,i_n} {X_1}^{i_1} {X_2}^{i_2} \cdots {X_n}^{i_n}, \qquad a_{i_1,\ldots,i_n} \in K, N \in \mathbb{N}_0$$

Der *Grad* von F ist das Maximum über $i_1 + \ldots + i_n$ mit $a_{i_1,\ldots,i_n} \neq 0$.

F heißt *homogen*, falls $a_{i_1,\ldots,i_n} \neq 0 \Leftrightarrow \sum_{j=1}^{n} i_j = \deg F$

Beispiel. $X_1X_2 + 3X_1 + 4$ ist ein Polynom in 2 Variablen mit Grad 2 und inhomogen.

$X_1X_2 + 3X_1X_3 + 4{X_3}^2$ hat 3 Variablen und Grad 2 und ist homogen.

Jedem Polynom $F \in K[x_1, \ldots, x_n]$ ordnen wir seine *Homogenisierung* $\bar{F} \in K[X_0, \ldots, X_n]$ zu:

$$\bar{F}(X_1, \ldots, X_n) = {X_0}^{\deg F} F\left(\frac{X_1}{X_0}, \ldots, \frac{X_n}{X_0}\right)$$

Beispiel. Sei $F = X_1X_2 + 3X_2 + 4$. Dann ist:

$$\bar{F}(X_1, X_2, X_3) = {X_0}^2 \left(\frac{X_1}{X_0} \cdot \frac{X_2}{X_0} + 3\frac{X_2}{X_0} + 4\right) = X_1X_2 + 3X_0X_2 + 4{X_0}^2$$

$\bar{F}$ ist wirklich ein Polynom und es ist homogen vom Grad $\deg F$.

Konkrete Vorschrift: Ergänze Potenzen von x_0, so dass alle Monome den selben Grad haben.

$$V(F) = \{(x_1, \ldots, x_n) \in K^n : F(x_1, \ldots, x_n) = 0\} \subset K^n$$

$$V(\bar{F}) = \left\{[x_0 : \ldots : x_n] \in \mathbb{P}_K^n : \bar{F}(x_0, \ldots, x_n) = 0\right\} \subset \mathbb{P}_K^n$$

Lemma 9.2. *$V(\bar{F})$ ist wohldefiniert und es gilt $V(\bar{F}) \cap K^n = V(F)$. $V(\bar{F})$ heißt* projektiver Abschluss *von $V(F)$ („V“ für „Varietät“).*

Beweis. Zu zeigen: $\bar{F}(x_0, \ldots, x_n) = 0 \Leftrightarrow \bar{F}(\lambda x_0, \ldots, \lambda x_n) = 0$ für $\lambda \in K^*$.

Wir betrachten $R = {x_0}^{i_1} \cdots {x_n}^{i_n}$:

$$R(\lambda x_0, \ldots, \lambda x_n) = \lambda {x_0}^{i_1}, \ldots, (\lambda x_n)^{i_n} = \lambda^{i_0 + \ldots + i_n} {x_0}^{i_1} \cdots {x_n}^{i_n} = \lambda^{\deg R} R(x_0, \ldots, x_n)$$

Da $\bar{F}$ homogen ist, folgt $\bar{F}(\lambda x_0, \ldots, \lambda x_n) = \lambda^{\deg \bar{F}} \bar{F}(x_0, \ldots, x_n)$, d. h.:

$$\text{linke Seite verschwindet} \overset{\lambda \neq 0}{\Longleftrightarrow} \text{rechte Seite verschwindet}$$

Punkte des $K^n \subset \mathbb{P}_k^n$ haben Koordinaten $[1 : x_1 : \ldots : x_n]$. Also gilt:

$$[x_0 : \ldots : x_n] \in K^n \cap V(\bar{F}) \Leftrightarrow x_0 = 1, \qquad \bar{F}(1, x_1, \ldots, x_n) = 0$$

$$(x_1, \ldots, x_n) \in V(F) \Leftrightarrow 1^{\deg F} F\left(\frac{X_1}{1}, \ldots, \frac{X_n}{1}\right) = F(X_1, \ldots, X_n)$$

Beispiel. $n = 2$, $\deg F = 1$, $aX_1 + bX_2 + c$ $(a, b, c \in K)$.

$V(F) = \{(x_1, x_2) \in K^2 : ax_1 + bx_2 + c = 0\}$ Gerade in K^2

$\bar{F} = aX_1 + bX_2 + cX_0$ Homogenisierung

$V(\bar{F}) = \{[x_0 : x_1 : x_2] \in \mathbb{P}_K^2 : ax_1 + bx_2 + cx_0 = 0\}$ Gerade in $\mathbb{P}_K^2$

$V(\bar{F})$ ist der projektive Abschluss einer affinen Geraden wie in 8.16.

Beispiel. Eine Hyperbel ist gegeben durch ${x_1}^2 - {x_2}^2 = 1$ in K^2. Projektiver Abschluss: ${x_1}^2 - {x_2}^2 = {x_0}^2$.

$$\begin{aligned} V(\bar{F}) \setminus V(F) &= \left\{[x_0 : x_1 : x_2] : {x_1}^2 - {x_2}^2 = {x_0}^2 \, x_0 = 0\right\} \\ &= \left\{[0 : x_1 : x_2] : {x_1}^2 - {x_2}^2 = 0 = (x_1 + x_2)(x_1 - x_2)\right\} \\ &= \{[0 : x_1 : x_1] : x_1 \in K^*\} \cup \{[0 : x_1 : -x_1] : x_1 \in K^*\} \\ &= \{[0 : 1 : 1], [0 : 1 : -1]\} \qquad \text{zwei zusätzliche Punkte} \end{aligned}$$

Sie gehören zu den Richtungen der Asymptoten der Hyperbel.

Definition 9.3. Eine *affine* (bzw. *projektive*) *Quadrik* ist die Nullstellenmenge eines Polynoms vom Grad 2 (bzw. eines homogenen Polynoms vom Grad 2) im affinen (bzw. projektiven) Raum K^n (bzw. $\mathbb{P}^n_K$).

Beispiel.

- Hyperbel (s. o.).
- Parabel $y = x^2$. $F(X, Y) = X^2 - Y$.

Zur Erinnerung an 7.10 und 7.11 auf Seite 26: $s : V \times V \to K$ symmetrische Bilinearform. Assoziierte quadratische Form: $q : V \to K$, $q(x) = s(s, s)$. Und wir hatten gezeigt: Ist $\operatorname{char} K \neq 2$ (d. h. $0 \neq 2$ in K), dann ist s eindeutig durch q bestimmt.

Ab jetzt sei $\operatorname{char} K \neq 2$.

Homogenes quadratisches Polynom:

$$Q(X_0, \dots, X_n) = a_0 {X_0}^2 + a_1 {X_1}^2 + \dots + a_n {X_n}^2 + \sum_{0 \leq i < j \leq n} a_{ij} X_i X_j$$

$$b_{ij} = \begin{cases} a_i & i = j \\ \frac{a_{ij}}{2} & i < j \\ \frac{a_{ji}}{2} & i > j \end{cases}, \qquad B = \left(b_{ij}\right) \in M_{(n+1) \times (n+1)}(K)$$

$$Q(X_0, \dots, X_n) = X^t B X, \qquad X = (X_0, \dots, X_n)$$

$$\begin{aligned} (X_0, \dots, X_n) \begin{pmatrix} b_{00} & \cdots & b_{0n} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{n0} & \cdots & b_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_0 \\ \vdots \\ X_n \end{pmatrix} &= (X_0, \dots, X_n) \begin{pmatrix} b_{00} X_0 + b_{01} X_1 + \dots \\ \vdots \\ b_{n0} X_0 + b_{11} X_1 + b_{12} X_2 + \dots \end{pmatrix} \\ &= b_{00} {X_0}^2 + b_{01} X_0 X_1 + b_{02} X_0 X_2 + \dots \\ &\quad + b_{10} X_1 X_0 + b_{11} X_1 X_1 + b_{12} X_1 X_2 + \dots \\ &= a_0 {X_0}^2 + a_{01} X_0 X_1 + a_{02} X_0 X_2 + \dots \\ &\quad + a_2 X_2 + \dots \\ &= Q(X_0, \dots, X_n) \end{aligned}$$

Zu Q gehört die Bilinearform $s : K^{n+1} \times K^{n+1} \to K$, $s(x, y) = x^t B y$.

$$V(Q) = \{(x_0, \dots, x_n) : q(x) = s(x, x) = 0\}$$

22.06.

Satz 9.4. *Sei Q eine affine (bzw. projektive) Quadrik. Dann ist Q von der Form*

$$\left\{x \in K^n : x^t G x + 2a^t x + b = 0\right\} \qquad \text{mit } G \in M_{n \times n}(K) \text{ symmetrisch, } a \in K^n,\ b \in K$$

$$\left(\text{bzw. } \left\{[x] \in \mathbb{P}^n_k : x^t \bar{G} x = 0\right\} \qquad \text{mit } \bar{G} \in M_{n+1 \times n+1}(K) \text{ symmetrisch}\right)$$

Beweis. Projektiver Fall:

$$Q(x_0,\ldots,x_n) = a_0{x_0}^2 + \ldots + a_n{x_n}^2 + \sum_{i<j} a_{ij}x_ix_j$$

$$\bar{G}_{ij} = \begin{cases} a_i & i=j \\ \frac{a_{ij}}{2} & i<j \\ \frac{a_{ji}}{2} & i>j \end{cases}$$

Affiner Fall: $V(F) \subset K^n$ mit F quadratisches Polynom in $X_1,\ldots,X_n$. $\bar{F} = \sum_{i,j} \bar{g}_{ij}X_iX_j$ die Homogenisierung. Dann ist: $V(F) \subset V(\bar{F}) \subset \mathbb{P}^n_k$.

$$V(\bar{F}) = \left\{[x] \in \mathbb{P}^n_K : x^t\bar{G}x = 0\right\} \qquad \text{mit } \bar{G} \text{ symmetrisch}$$

Also:

$$V(F) = V(\bar{F}) \cap K^n = \left\{[x_0 : \ldots : x_n] : x_0 = 1,\, x^t\bar{G}x = 0\right\}$$

$$\begin{aligned} F(X_1,\ldots,X_n) = \bar{F}(1,X_1,\ldots,X_n) &= \sum_{i,j=1}^n \bar{g}_{ij}X_iX_j + \sum_{i=1}^n \bar{g}_{i0}X_i1 + \sum_{j=1}^n \bar{g}_{0j}X_j + \bar{g}_{00}11 \\ &= \sum_{i,j=1}^n \bar{g}_{ij}X_iX_j + 2\sum_{i=1}^n \bar{g}_{i0}X_i + \bar{g}_{00} = X^tGX + 2a^tX + b \end{aligned}$$

$$G = \left(\bar{g}_{ij}\right)_{i,j=1}^n, \qquad a = \begin{pmatrix} g_{10} \\ \vdots \\ g_{n0} \end{pmatrix}, \qquad b = \bar{g}_{00}$$

$$\bar{G} = \begin{pmatrix} b & a^t \\ a & G \end{pmatrix}$$

Damit haben wir:

Theorie der Quadriken $\leftrightarrow$ Theorie der symmetrischen Bilinearformen

Erinnerung: Nach Theorem 7.12 auf Seite 26 existieren Orthogonalbasen.

Theorem 9.5. *Sei* $\operatorname{char} K \neq 2$*,* $Q \subset \mathbb{P}^n_K$ *eine Quadrik. Dann gibt es Koordinaten des* $\mathbb{P}^n_K$*, so dass die Gleichung von* Q *die Form*

$$b_0{X_0}^2 + b_1{X_1}^2 + \ldots + b_n{X_n}^2 = 0 \qquad \textit{mit } b_i \in K \textit{ hat.}$$

Beweis. Die Quadrik gehört zu einer symmetrischen Bilinearform $s : V \times V \to K$ (wobei jetzt $V = K^{n+1}$ ist). Nach 7.12 gibt es eine Orthogonalbasis $v_0,\ldots,v_n$ von V bezüglich s (d. h. $s(v_i,v_j) = 0$ für $i \neq j$).

Bezüglich dieser Basis hat s die Matrix

$$\begin{pmatrix} b_0 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & b_n \end{pmatrix} = \bar{G},$$

d. h. Q hat die angegebene Gleichung. □

Theorem 9.6. *Sei* K *algebraisch abgeschlossen mit* $\operatorname{char} K \neq 2$ *und* $Q \subset \mathbb{P}^n_K$ *eine Quadrik. Dann gibt es Koordinaten des* $\mathbb{P}^n_K$*, so dass die Gleichung von* Q *die Form*

$$F(X_0,\ldots,X_n) = {X_0}^2 + \ldots + {X_r}^2 \qquad \textit{mit } r \leq n \textit{ hat.}$$

Beweis. Nach Korollar 7.13 auf Seite 27 werden die Koeffizienten der darstellenden Matrix 1 oder 0. □

Theorem 9.7. *Sei* $K = \mathbb{R}$*,* $Q \subset \mathbb{P}^n_K$ *eine Quadrik. Dann gibt es Koordinaten des* $\mathbb{P}^n_{\mathbb{R}}$*, so dass* Q *die Form*

$$F(X_0,\ldots,X_n) = {X_0}^2 + \ldots + {X_r}^2 - {X_{r+1}}^2 - \ldots - {X_m}^2 \qquad \textit{mit } r \leq m \leq n \textit{ hat.}$$

Beweis. Gilt nach dem Trägheitssatz von Sylvester auf Seite 28.

Quadriken in der Ebene:

Betrachten wir den einfachsten Fall: Quadriken $Q \subset \mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$. Koordinaten sind dann x_0, x_1, x_2.

1. Fall: ${x_0}^2 + {x_1}^2 + {x_2}^2 = 0$ (nicht-degenerierter Fall).

2. Fall: ${x_0}^2 + {x_1}^2 = (x_0 + \mathrm{i}x_1)(x_0 - \mathrm{i}x_1) = 0$ ($\Rightarrow x_2$ beliebig).
$Q = \{[\mathrm{i}x_1 : x_1 : x_2] : (x_1, x_2) \in K^n \setminus \{0\}\} \cup \{[-\mathrm{i}x_1 : x_1 : x_2] : (x_1, x_2) \in K^n \setminus \{0\}\}$.

3. Fall: ${x_0}^2 = 0$. $Q = \left\{[0 : x_1 : x_2] \in \mathbb{P}^2_K\right\}$ (unendlich ferne Gerade)

Es gibt also (bis auf Koordinatentransformation) nur eine nicht-degenerierte Quadrik in $\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$.

Betrachte nun Quadriken $Q \subset \mathbb{P}^2_{\mathbb{R}}$.

Bemerkung. ${x_0}^2 + {x_1}^2 + {x_2}^2 = 0 \Leftrightarrow -{x_0}^2 - {x_1}^2 - {x_2}^2 = 0$

1. Fall: (voller Rang)
${x_0}^2 + {x_1}^2 + {x_2}^2 = 0 \Rightarrow Q = \emptyset$.
${x_0}^2 + {x_1}^2 - {x_2}^2 = 0$ (einzige nicht-degenerierte Quadrik).

2. Fall: (Rang 1)
${x_0}^2 + {x_1}^2 = 0 \Rightarrow x_0 = x_1 = 0$. $Q = \left\{[0 : 0 : x_2] \in \mathbb{P}^2_{\mathbb{R}}\right\} = \{[0 : 0 : 1]\}$.
${x_0}^2 - {x_1}^2 = (x_0 + x_1)(x_0 - x_1) = 0$. $Q = \left\{[x_0 : x_0 : x_2] \in \mathbb{P}^2_{\mathbb{R}}\right\} \cup \left\{[x_0 : -x_0 : x_2] \in \mathbb{P}^2_{\mathbb{R}}\right\}$ (zwei Geraden).

3. Fall: (Rang 0)
${x_0}^2 = 0$. $Q = \left\{[0 : x_1 : x_2] \in \mathbb{P}^2_{\mathbb{R}}\right\}$ (unendlich ferne Gerade).

Betrachte jetzt affine Quadriken in $\mathbb{R}^2$ mit den Koordinaten x, y.

Die allgemeine Gleichung einer Quadrik in $\mathbb{R}^2$ lautet:

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 + 2dx + 2ey + f = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} d & e \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + f = 0$$

$a = b = c = 0$: Keine Quadrik, sondern eine lineare Gleichung.

$a = c = 0$, $b \neq 0$: Ersetze x durch $x' = x + y$, also $x = x' - y$. Dann erhält man:

$$2b(x' - y)y + 2d(x' - y) + \ldots = 2bx'y - 2by^2 + \ldots$$

Also $a \neq 0$ oder $b \neq 0$ und o. B. d. A. ist $a \neq 0$. Falls $a < 0$, multipliziere die Gleichung mit -1, also ab jetzt: $a > 0$.

Ersetze x durch $x' = \sqrt{a} \cdot x$, also $x = \frac{1}{\sqrt{a}} \cdot x'$. Dann erhält man:

$$ax^2 + \ldots = x'^2 + \ldots$$

Also ab jetzt: $a = 1$. Das heißt, die Quadrik sieht jetzt folgendermaßen aus:

$$x^2 + 2bxy + cy^2 + 2dx + 2ey + f = 0$$

Setze $x' = x + by$ (quadratische Ergänzung), also $x = x' - by$. Dann erhält man:

$$(x' - by)^2 + 2b(x' - by)y + \ldots = x'^2 - 2bx'y + b^2y^2 + 2bx'y - 2b^2y^2 + \ldots$$

Also ab jetzt: $b = 0$. Das heißt, die Quadrik sieht jetzt folgendermaßen aus:

$$x^2 + cy^2 + 2dx + 2ey + f = 0$$

1. Fall: $c > 0$: Setze $y' = \sqrt{c} \cdot y$. Dann: $x^2 + y'^2 + \dots$.

2. Fall: $c = 0$: Dann: x^2+ lineare Terme.

3. Fall: $c < 0$: Setze $y' = \sqrt{-c} \cdot y$. Dann: $x^2 - y'^2+$ lineare Terme.

Weiter im 1. Fall: $x^2 + y^2 + 2dx + 2ey + f = 0$. Setze $x' = x + d$, also $x = x' - d$, und $y' = y + e$ bzw. $y = y' - e$. Dann:

$$(x' - d)^2 + (y' - e)^2 + 2d(x' - d) + 2e(y' - e) + f = x'^2 - 2dx' + d^2 + y'^2 - 2ey' + e^2 + 2dx' - 2d^2 + 2ey' - 2e^2 + f$$

Also:

$$x^2 + y^2 = h$$

1. Fall: $h = 0$: $Q = \{(0,0)\}$ (Punkt).

2. Fall: $h < 0$: $Q = \emptyset$.

3. Fall: $h > 0$: Setze $x' = \sqrt{h} \cdot x$ und $y' = \sqrt{h} \cdot y$. Dann: $x^2 + y^2 = 1$ (Kreis).

Weiter im 2. Fall: $x^2 + 2dx + 2ey + f = 0$. Setze $x' = x + d$. Dann: $x^2 + 2ey + f = 0$.

1. Fall: $e = 0$: $x^2 = h$. $Q = \emptyset$ oder eine Gerade.

2. Fall: $e \neq 0$: Setze $y' = -2ey + f$. Dann: $x^2 - y = 0$, d. h. $y = x^2$ (Parabel).

Weiter im 3. Fall: $x^2 - y^2 + 2dx + 2ey + f = 0$. Wie im ersten Fall: Ohne Einschränkung $x^2 - y^2 = (x - y)(x + y) = h$

1. Fall: $h = 0$ (zwei Geraden).

2. Fall: $h > 0$: $x^2 - y^2 = 1$ (Hyperbel).

3. Fall: $h < 0$: Multipliziere mit -1 und vertausche x und y (Hyperbel).

Satz 9.8. *Sei $Q \subset \mathbb{R}^2$ eine affine Quadrik. Falls $Q \neq \emptyset$ und nicht nur einen Punkt enthält ($Q \neq \{P\}$), dann ist Q (in geeigneten Koordinaten):*

$$\left.\begin{array}{l}\textit{1. Kreis/Ellipse}\\ \textit{2. Parabel}\\ \textit{3. Hyperbel}\end{array}\right\}\textit{nicht-degeneriert}$$

4. Zwei Geraden

5. Eine Gerade

Bemerkung. Homogenisieren zeigt, dass die ersten drei Fälle zur nicht-degenerierten projektiven Quadrik ${x_0}^2 + {x_1}^2 - {x_2}^2 = 0$ gehören.

Anzahl der Schnittpunkte mit der unendlich fernen Geraden $\{x_0 = 0\}$:

Kreis: $x^2 + y^2 = 1 \rightsquigarrow {x_1}^2 + {x_2}^2 = {x_0}^2$. Bestimme $\left\{[x_0 : x_1 : x_2] : x_0 = 0,\ {x_1}^2 + {x_2}^2 = 0\right\} = \emptyset$.

Hyperbel: $x^2 - y^2 = 1$. Man erhält:

$$\left\{[x_0 : x_1 : x_2] : x_0 = 0,\ {x_1}^2 - {x_2}^2 = {x_0}^2\right\} = \{[0 : x_1 : x_1], [0 : x_1 : -x_1]\} = \{[0 : 1 : 1], [0 : 1 : -1]\}$$

Parabel: $x^2 = y$. Man erhält einen Punkt:

$$\left\{[x_0 : x_1 : x_2] : x_0 = 0,\ {x_1}^2 = x_0 x_2\right\} = \{[0 : 0 : x_2]\} = \{[0 : 0 : 1]\}$$

Bemerkung (Zentralkräfte in der Physik). Dann sind die Bewegungsbahnen eben und die Körper bewegen sich auf Kegelschnitten. Für Planeten ist dies im Ersten Keplerschen Gesetz fixiert.

23.06.

10 Jordansche Normalform

Wiederholung: Für einen linearen Endomorphismus $f : V \to V$ heißt $\lambda \in K$ Eigenwert zum Eigenvektor $v \neq 0$, falls $f(v) = \lambda v$.

f ist diagonalisierbar, falls V eine Basis aus Eigenvektoren von f (eine Eigenbasis) hat. Die darstellende Matrix bezüglich einer Eigenbasis ist eine Diagonalmatrix.

Nicht alle Endomorphismen sind aber diagonalisierbar.

Ist V endlich-dimensional und $\lambda \in K$ ein Eigenwert, dann ist äquivalent dazu λ eine Nullstelle des charakteristischen Polynoms $\chi_f(T) = \det(f - \lambda \operatorname{Id})$.

Ist K algebraisch abgeschlossen, dann gibt es immer mindestens einen Eigenwert. Mit 5.12 können wir f trigonalisieren, d. h. in Dreiecksgestalt bringen, bzw. existiert nach 5.14 eine vollständige f-invariante Fahne in V:

$$0 = V_0 \subsetneq V_1 \subsetneq V_2 \subsetneq \ldots \subsetneq V_n = V, \qquad V_i \text{ Untervektorräume}, \dim V_i = i,\ f(V_i) \subset V_i$$

Theorem 10.1 (Jordansche Normalform). *Sei K algebraisch abgeschlossen, V ein endlich-dimensionaler K-Vektorraum und $f : V \to V$ eine lineare Abbildung. Dann existiert eine Basis von V (*Jordan-Basis*), so dass die darstellende Matrix die Gestalt*

$$\begin{pmatrix} J_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & J_n \end{pmatrix} \qquad \textit{mit } J_i = \begin{pmatrix} \lambda_i & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & \lambda_i \end{pmatrix} \textit{ hat.}$$

J_i heißt Jordan-Block. *Dabei sind die J_i durch f eindeutig bestimmt bis auf Reihenfolge.*

Beispiel. Die Matrix $\left(\begin{smallmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{smallmatrix}\right)$ ist ein 2-dimensionaler Jordan-Block zum Eigenwert 2. Das war unser Standardbeispiel für einen nicht-diagonalisierbaren Endomorphismus.

Es gilt:

f diagonalisierbar $\Leftrightarrow$ alle Jordanblöcke sind 1×1-Matrizen

Wäre also $\left(\begin{smallmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{smallmatrix}\right)$ diagonalisierbar, dann durch $\left(\begin{smallmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{smallmatrix}\right)$, da 2 der einzige Eigenwert ist. Die Eindeutigkeit der Jordanschen Normalform sagt: Basiswechsel nicht möglich.

Beweis (Idee). Gegeben sei eine Jordan-Matrix. Wie können wir die Jordan-Blöcke rekonstruieren?

1. Schritt: Bestimme die Eigenwerte als Nullstellen des charakteristischen Polynoms.

2. Schritt: Teile den Vektorraum in Unterräume zu verschiedenen Eigenwerten λ_i.

3. Schritt: Teile jeweils die Matrix mit genau einem Eigenwert auf in Jordan-Blöcke.

Beispiel. $M = \left(\begin{smallmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{smallmatrix}\right)$.

$\ker(M - 3\operatorname{Id}) = \ker\left(\begin{smallmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{smallmatrix}\right) = \left\langle \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{smallmatrix}\right) \right\rangle$. Der Eigenraum zu 3 liefert den Jordan-Block.

$\ker(M - 2\operatorname{Id}) = \ker\left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) = \left\langle \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right) \right\rangle$

Es gilt $\left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)\left(\left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)\right) = \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right) \in \ker\left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$, d. h. $\left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)^2 = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$. Also ist $\ker\left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)^2 = \ker\left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) = \left\langle \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right) \right\rangle$

Definition 10.2. Sei $\lambda \in K$ ein Eigenwert von f. Der *Hauptraum* (verallgemeinerter Eigenraum) zu λ ist

$$V'_\lambda = \{v \in V : (f - \lambda \operatorname{Id})^n (v) = 0 \text{ für ein } n \in \mathbb{N}\}.$$

Bemerkung. Es gilt $V_\lambda \subset V'_\lambda$, da $V_\lambda = \ker(f - \lambda \operatorname{Id})$.

Lemma 10.3. *Sei $g : V \to V$ linear,* $\dim V < \infty$.

a) *Für $i \in \mathbb{N}_0$ sind die Folgen der* $\ker g^i$, $\operatorname{im} g^i$ $(g^0 = \operatorname{Id})$

$$0 = \ker g^0 \subset \ker g \subset \ker g^2 \subset \ldots \subset V$$

$$0 \subset \ldots \subset \operatorname{im} g^i \subset \operatorname{im} g^{i-1} \subset \ldots \subset \operatorname{im} g \subset V = \operatorname{im} g^0$$

Fahnen in V.

b) *Aus* $\ker g^i = \ker g^j$ *für $i < j$ folgt* $\ker g^i = \ker g^k$ *für alle $k \geq i$ und* $\operatorname{im} g^i = \operatorname{im} g^k$ *für alle $k \geq i$.*

Ebenso: Aus $\operatorname{im} g^i = \operatorname{im} g^j$ *für $i < j$ folgt* $\ker g^i = \ker g^k$ *für alle $k \geq i$ und* $\operatorname{im} g^i = \operatorname{im} g^k$ *für alle $k \geq i$.*

c) *Ein solches $i \in \mathbb{N}_0$ existiert. Das minimale i mit dieser Eigenschaft heißt* stabiler Exponent.

Beweis. Zu a): $\ker g^i$ und $\operatorname{im} g^i$ sind Untervektorräume als Kern bzw. Bild einer linearen Abbildung g^i. Sei $x \in \ker g^i$, d. h. $g^i(x) = 0$. Dann folgt:

$$g^{i+1}(x) = g \circ g^i(x) = g\left(g^i(x)\right) = g(0) = 0$$

Also ist $\ker g^i \subset \ker g^{i+1}$.

Sei $y \in \operatorname{im} g^i$, d. h. es gibt ein x mit $g^i(x) = y$. Daraus folgt:

$$y = g^{i-1}(g(x)) \in \operatorname{im} g^{i-1}$$

Also ist $\operatorname{im} g^i \subset \operatorname{im} g^{i-1}$.

Zu b): Wegen der Inklusion folgt aus $\ker g^i = \ker g^j$ für $i < j$:

$$\ker g^i = \ker g^{i+1} = \ldots = \ker g^j$$

Ebenso folgt aus $\operatorname{im} g^i = \operatorname{im} g^j$:

$$\operatorname{im} g^i = \operatorname{im} g^{i+1} = \ldots = \operatorname{im} g^j$$

Nach der Dimensionsformel gilt:

$$\dim \ker g^i + \dim \operatorname{im} g^i = \dim V, \qquad \dim \ker g^j + \dim \operatorname{im} g^j = \dim V$$

Also ist:

$$\ker g^i = \ker g^j \overset{\text{a)}}{\Leftrightarrow} \dim \ker g^i = \dim \ker g^j \Leftrightarrow \dim \operatorname{im} g^i = \dim \operatorname{im} g^j \overset{\text{a)}}{\Leftrightarrow} \operatorname{im} g^i = \dim g^j$$

Behauptung: $\ker g^{i-1} = \ker g^i \Rightarrow \operatorname{im} g^i = \operatorname{im} g^k$. Es reicht dabei aus, zu zeigen, dass $\operatorname{im} g^i \subset \operatorname{im} g^k$ für alle $k > i$ gilt.

Sei also $y \in \operatorname{im} g^i$, d. h. $y = g\left(g^{i-1}(x)\right)$ für ein $x \in V$. Dabei $z = g^{i-1}(x) \in \operatorname{im} g^{i-1} = \operatorname{im} g^i$, d. h. $z = g^i(u)$. Dann ist $y = g(z) = g\left(g^i(u)\right) = g^{i+1}(u) \in \operatorname{im} g^{i+1}$.

Damit ist gezeigt: $\operatorname{im} g^i \subset \operatorname{im} g^{i+1}$. „$\supset$" gilt nach a). Also ist $\operatorname{im} g^i = \operatorname{im} g^{i+1}$.

Zu c): Da $\dim V < \infty$, wird die Folge der $\dim \ker g^i$ konstant. Wegen a) wird dann die Folge der $\ker g^i$ konstant. □

Beispiel. Sei $g = f - \lambda \operatorname{Id}$, $V'_\lambda = \ker(f - \lambda \operatorname{Id})^n$ und n der stabile Exponent. Insbesondere ist jetzt V'_λ ein Untervektorraum und es ist immer $u \leq \dim V$. Also gilt:

$$V'_\lambda = \ker(f - \lambda \operatorname{Id})^{\dim V}$$

Im Fall $f = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ und $\lambda = 3$ ist $f - 3\operatorname{Id} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Der Kern ist 1-dimensional.

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Der Kern ist immer noch 1-dimensional.

Für $\lambda = 2$: $\left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$. Der Kern ist 1-dimensional.

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Der Kern ist nun 2-dimensional.

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Der Kern bleibt 2-dimensional.

Satz 10.4. *Sei K algebraisch abgeschlossen, V endlich-dimensional und λ ein Eigenwert von $f : V \to V$. Dann ist V'_λ ein f-invarianter Teilraum mit der Dimension $\nu_f(\lambda)$ (algebraische Vielfachheit). Es gilt:*

$$\chi_f|_{V'_\lambda}(T) = (\lambda - T)^{\nu_f(\lambda)}$$

($\mu_f(\lambda) = \dim V_\lambda \leq \nu_f(\lambda)$ nach 5.10.)

Beweis. Sei $x \in V'_\lambda$. Dann ist zu zeigen: $f(x) \in V'_\lambda$.

$x \in \ker(f - \lambda \operatorname{Id})^u$ für $u \in \mathbb{N}_0$.

$$\underbrace{(f - \lambda \operatorname{Id})^u}_{=:g}(f(x)) = g^{u-1}((f - \lambda \operatorname{Id})(f(x))) = g^{u-1}\left(f^2(x) - f(\lambda x)\right) = g^{u-1}(f(g(x))) = \ldots = f(g^u(x)) = f(0) = 0$$

Behauptung: $\chi_f|_{V'_\lambda}$ teilt χ_f.

Sei $e_1, \ldots, e_k$ eine Basis von V'_λ und $e_{k+1}, \ldots, e_n$ sei eine Ergänzung zu einer Basis von V.

Es gilt $f(e_1) \in V'_\lambda$, also $f(e_1) = a_{11}e_1 + a_{21}e_2 + \ldots + a_{k1}e_k$.

f hat also die darstellende Matrix $\left(\begin{smallmatrix} A & * \\ 0 & B \end{smallmatrix}\right)$ mit einer $k \times k$-Matrix A zu $f|_{V'_\lambda}$ in der Basis $e_1, \ldots, e_k$ und einer $(n-k) \times (n-k)$-Matrix B.

Also gilt: $\chi_f(T) = \det(M - T \operatorname{Id}_n) = \underbrace{\det(A - T \operatorname{Id}_k)}_{= \chi_f|_{V'_\lambda}} \cdot \det(B - T \operatorname{Id}_{n-k})$.

Behauptung: Der einzige Eigenwert von $f|_{V'_\lambda}$ ist λ.

Sei $\lambda' \neq \lambda$ ein Eigenwert von $f|_{V'_\lambda}$ und sei $v' \in V$ der zugehörige Eigenvektor, d. h. $v' \in V'_\lambda \setminus \{0\}$ und $f(v') = \lambda' v'$.

$$\underbrace{(f - \lambda \operatorname{Id})^u}_{= 0, \text{ da } v' \in V'_\lambda}(v') = (\lambda' - \lambda)^u (v')$$

Da gilt $v' \neq 0$, weil v' ein Eigenvektor ist, müsste $(\lambda' - \lambda)^u = 0$ sein. Das ist ein Widerspruch zu $\lambda \neq \lambda'$.

$\chi_f|_{V'_\lambda}$ ist Produkt von Linearfaktoren (da K algebraisch abgeschlossen ist). Die einzige Nullstelle ist λ. Also gilt:

$$\chi_f|_{V'_\lambda}(T) = (\lambda - T)^k$$

Also teilt $(\lambda - T)^k$ das charakteristische Polynom $\chi_f(T) = (\lambda - T)^{\nu_f(\lambda)} \cdot$ (weitere Faktoren ohne Nullstelle λ). Also ist $k \leq \nu_f(\lambda)$.

Behauptung: $\dim V'_\lambda = \nu_f(\lambda)$ **29.06.**

Angenommen, $k = \dim V'_\lambda < \nu_f(\lambda)$. Dann betrachte den Vektorraum $W = V / V'_\lambda$.

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "f"] \arrow[d] & V \arrow[d] \\ W \arrow[r, dotted, "\bar{f}"'] & W \end{tikzcd}$$

Sei $\bar{f} : W \to W$, $v + V'_\lambda \mapsto f(v) + V'_\lambda$. Diese Abbildung ist wohldefiniert, da V'_λ f-invariant ist. Und $\bar{f}$ ist offensichtlich linear. Es gilt $\chi_{\bar{f}}(T) = \chi_B(T)$, denn die darstellende Matrix von $\bar{f}$ ist B.

Die Klassen $v_{k+1} + V'_\lambda, v_{k+2} + V'_\lambda, \ldots, v_n + V'_\lambda$ sind eine Basis von W. Also:

$$\chi_f = \chi_{f|_{V'_\lambda}} \cdot \chi_{\bar{f}}$$

Nach Annahme ist λ eine Nullstelle von $\chi_{\bar{f}}$, d. h. λ ein Eigenwert von $\bar{f}$.

Sei $\bar{v} = v + V'_\lambda \in W$ ein Eigenvektor von $\bar{f}$ zum Eigenwert λ. Das bedeutet:

$$\left(\bar{f} - \lambda \,\mathrm{Id}\right)(\bar{v}) = 0 \Leftrightarrow (f - \lambda \,\mathrm{Id})(v) \in V'_\lambda$$

Nach Definition von V'_λ gilt:

$$(f - \lambda \,\mathrm{Id})^n \left((f - \lambda \,\mathrm{Id})(v)\right) = 0$$

bzw.

$$(f - \lambda \,\mathrm{Id})^{n+1} = 0 \Rightarrow v \in V'_\lambda,$$

also $\bar{v} = v + V_\lambda = 0 + V'_\lambda$. Doch das ist ein Widerspruch dazu, dass $\bar{v}$ ein Eigenvektor sein sollte.

Also: $k = \nu_f(\lambda)$ □

Satz 10.5. *Sei K algebraisch abgeschlossen und $f : V \to V$ linear. Seien $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ die Eigenwerte von f. Dann ist die natürliche Abbildung*

$$V'_{\lambda_1} \oplus \ldots \oplus V'_{\lambda_r} \to V, \qquad (v_1, \ldots, v_r) \mapsto v_1 + \ldots + v_r$$

ein Isomorphismus.

Beweis. Es gilt nun $\dim V'_{\lambda_1} + \ldots + \dim V'_{\lambda_r} = \nu_f(\lambda_1) + \ldots + \nu_f(\lambda_r) = \deg \chi_f = \dim V$. Die beiden Räume haben die selbe Dimension, daher genügt es, die Injektivität oder die Surjektivität zu zeigen.

Wir zeigen die Injektivität: Sei $v_i \in V'_{\lambda_i}$, $i = 1, \ldots, r$ mit $\sum\limits_{i=1}^{r} v_i = 0$.

Behauptung: $v_i = 0$.

Sei s die Anzahl der $v_i \neq 0$. Wir wählen $v_1, \ldots, v_r$ so, dass s minimal ist. O. B. d. A. sind $v_1, \ldots, v_s \neq 0$ und $v_{s+1}, \ldots, v_r = 0$. Wir betrachten nun $g = (f - \lambda_1 \,\mathrm{Id})^{\nu_f(\lambda_1)}$. Alle V'_{λ_i} sind g-invariant, da sie f-invariant sind. Also sind alle $g(v_i) \in V'_{\lambda_i}$. Es gilt:

$$0 = g(0) = g(v_1 + \ldots + v_s) = \underbrace{g(v_1)}_{=0} + \underbrace{g(v_2)}_{\in V'_{\lambda_2}} + \ldots + \underbrace{g(v_s)}_{\in V'_{\lambda_s}}$$

Also wieder eine Summe von Elementen der Haupträume mit Summe 0. Hier sind allerdings nur noch höchstens $s - 1$ Summanden ungleich 0. Da s als minimal vorausgesetzt war, muss $g(v_2) = \ldots = g(v_s) = 0$ sein.

Zu zeigen ist: $g|_{V_{\lambda_i}}$ ist injektiv für $i \neq 1$. Dafür genügt es, zu zeigen: $(f - \lambda_1 \,\mathrm{Id})|_{V_{\lambda_i}}$ ist injektiv.

Sei $v \in V'_{\lambda_i}$ ein Element von $\ker(f - \lambda_1 \,\mathrm{Id})$, d. h. v ist eine Eigenvektor von f zum Eigenwert λ_1. Der einzige Eigenwert von f in V'_{λ_i} ist $\lambda_i \neq \lambda_1$ nach Satz 10.4. Also ist $v = 0$. Damit gilt $g(v_i) = 0$ $(i = 2, \ldots, s) \Rightarrow v_i = 0$ $(i = 2, \ldots, s)$. Dieser Widerspruch zeigt die Behauptung. □

Bemerkung. Zur Konstruktion der Jordan-Zerlegung genügt es jetzt, $f : V \to V$ mit $(f - \lambda \,\mathrm{Id})^n = 0$ zu betrachten. Die Abbildung $g = f - \lambda \,\mathrm{Id}$ ist *nilpotent*, d. h. $g^n = 0$ für ein $n \in \mathbb{N}$.

Lemma 10.6. *Sei $: V \to V$ nilpotent. Dann gilt $g^{\dim V} = 0$.*

Beweis. Betrachte

$$0 \subsetneq \ker g \subsetneq \ker g^2 \subsetneq \ldots \subsetneq \ker g^u = \ker g^{u+1} = \ldots = V \qquad (u \text{ der stabile Exponent})$$

Es gilt:

$$\dim \ker g^{i+1} \geq \dim \ker g^i + 1 \Rightarrow \ker g^i \geq i, \;\dim \ker g^{\dim V} \geq \dim V$$

Also:

$$\ker g^{\dim V} = V$$

bzw. $g^{\dim V} = 0$. □

Beispiel. Sei f durch $\begin{pmatrix} 2&1&0\\0&2&0\\0&0&2 \end{pmatrix}$ oder $\begin{pmatrix} 2&1&0&0\\0&2&0&0\\0&0&2&1\\0&0&0&2 \end{pmatrix}$ gegeben. In beiden Fällen gibt es zwei Jordan-Blöcke und zwei jeweils 1-dimensionale Haupträume.

Wie finden wir jetzt die Blöcke?

$$g = f - 2\,\mathrm{Id} = \begin{pmatrix} 0&1&0\\0&0&0\\0&0&0 \end{pmatrix} \qquad \text{bzw.} \begin{pmatrix} 0&1&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0 \end{pmatrix}$$

Definition 10.7. Sei $f : V \to V$ linear, $\dim V < \infty$. Eine *zyklische Basis* von V ist eine Basis der Gestalt

$$f^{d-1}(v), \ldots, f^2(v), f(v), v \qquad (\dim V = d).$$

Der Vektor v heißt dann *Hauptvektor*. V heißt *f-zyklisch*, falls er eine f-zyklische Basis hat. Ein linearer Unterraum $W \subset V$ heißt f-zyklisch, falls $f(W) \subset W$ gilt und W $f|_W$-zyklisch ist. Die *Ordnung* von $v \in V$ ist die kleinste Zahl $i \in \mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}$ mit $f^i(v) = 0$.

Beispiel. Ist $f = \begin{pmatrix} 0&1\\0&0 \end{pmatrix}$, dann ist $\begin{pmatrix} 0\\1 \end{pmatrix}$ ein Hauptvektor. $f\left(\begin{pmatrix} 0\\1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 0&1\\0&0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0\\1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\\0 \end{pmatrix}$. Also ist $\{f(v), v\} = \left\{\begin{pmatrix} 1\\0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0\\1 \end{pmatrix}\right\}$ eine Basis. $V = K^2$ ist f-zyklisch.

Ist $f = \begin{pmatrix} 0&1&0\\0&0&1\\0&0&0 \end{pmatrix}$, dann ist $\begin{pmatrix} 0\\0\\1 \end{pmatrix}$ ein Hauptvektor.

Wohingegen es bei $\begin{pmatrix} 0&1&0\\0&0&0\\0&0&0 \end{pmatrix}$ keinen Hauptvektor gibt, da f^2 in jedem Fall die Nullabbildung ist. Aber $\left\langle \begin{pmatrix} 1\\0\\0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0\\1\\0 \end{pmatrix} \right\rangle := V'$ ist f-zyklisch (Hauptvektor $f|_{V'}$ ist $\begin{pmatrix} 0\\1\\0 \end{pmatrix}$) und $\left\langle \begin{pmatrix} 0\\0\\1 \end{pmatrix} \right\rangle$ ist ebenfalls f-zyklisch.

Lemma 10.8. *Sei* $\dim V < \infty$, $f : V \to V$ *nilpotent. Dann ist die darstellende Matrix von* f *bezüglich einer* f*-zyklischen Basis ein Jordan-Block zum Eigenwert* 0*:*

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & & 0\\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1\\ 0 & & & 0 \end{pmatrix}$$

Ist umgekehrt $e_1, \ldots, e_d$ *eine Basis, so dass die darstellende Matrix von* f *ein Jordan-Block ist, so ist* e_d *ein Hauptvektor und die Basis ist zyklisch.*

Beweis. $e_1 = f^{d-1}(v), e_2 = f^{d-2}(v), \ldots, e_{d-1} = f(v), e_d = v$.

Die darstellende Matrix ist $\begin{pmatrix} f(e_1) & \cdots & f(e_d) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & 0\\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1\\ 0 & & & 0 \end{pmatrix}$, also gerade ein Jordan-Block.

$$f(e_1) = f\left(f^{d-1}(v)\right) = f^d(v) = 0, \qquad \text{da } f \text{ nilpotent}$$

$$f(e_2) = f\left(f^{d-2}(v)\right) = f^{d-1}(v) = e_1$$

$$f(e_i) = f\left(f^{d-i}(v)\right) = f^{d-i+1}(v) = e_{-1}$$

Sei umgekehrt $e_1, \ldots, e_d$ eine Basis, so dass die darstellende Matrix $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & 0\\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1\\ 0 & & & 0 \end{pmatrix}$ ist. Dann ist:

$$f(e_i) = 0e_1 + 0e_2 + \ldots + 1e_{i-1} + 0e_i + \ldots + 0e_d = e_{i-1} \Rightarrow e_i = f^{d-i}(e_d)$$

e_d ist Hauptvektor. □

Wir haben also jetzt:

Finden von Jordan-Blöcken $\leftrightarrow$ Finden von zyklischen Unterräumen

Theorem 10.9. *Sei V d-dimensional, $d < \infty$, $f : V \to V$ nilpotent. Dann gibt es f-zyklische Teilräume $V_1, \ldots, V_r \subset V$, so dass*

$$V_1 \oplus \ldots \oplus V_r \to V$$

ein Isomorphismus ist.

Sei ferner:

$$\varrho_k(f) = \#\{V_i : \dim V_i = k\}$$

Dann sind r und alle $\varrho_k(f)$ eindeutig bestimmt durch f und für $i = 0, \ldots, d-1$ gilt:

$$\sum_{k=i+1}^{d} (k-i)\,\varrho_k(f) = \operatorname{rk} f^i \qquad (f^0 = \mathrm{Id})$$

30.06.

Beweis. Es gilt $r = \varrho_1(f) + \varrho_2(f) + \ldots + \varrho_d(f)$. Also ist r eindeutig bestimmt.

Zur Eindeutigkeit von $\varrho_k(f)$: Die Formel

$$\sum_{k=i+1}^{d} (k-i)\,\varrho_k(f) = \operatorname{rk} f^i \qquad (f^0 = \mathrm{Id})$$

liefert ein lineares Gleichungssystem für die $\varrho_k(f)$:

$$\begin{aligned} i = d-1: &\qquad & 1\varrho_d(f) &= \operatorname{rk} f^{d-1} \\ i = d-2: &\quad \sum_{k=d-1}^{d} (k-d+2)\,\varrho_k(f) = & 1\varrho_{d-1}(f) + 2\varrho_{d-2}(f) &= \operatorname{rk} f^{d-2} \\ \vdots \end{aligned}$$

Wir erhalten also für das Gleichungssystem eine Dreicksmatrix mit Termen ungleich Null auf der Hauptdiagonalen. Damit ist das Gleichungssystem eindeutig lösbar und die $\varrho_k(f)$ durch f eindeutig bestimmt.

Wir beweisen nun die Existenz durch vollständige Induktion nach $\operatorname{ord} f =: m$, also der kleinsten Potenz, so dass gilt $f^{\operatorname{ord} f} = 0$.

Idee: Es gilt ja

$$f = \begin{pmatrix} J_1 & & & 0 \\ & 0 & & \\ & & J_2 & \\ 0 & & & \ddots \end{pmatrix} \qquad \text{mit } J_i = \begin{pmatrix} \lambda_i & 1 & & 0 \\ & \lambda_i & 1 & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & \lambda_i \end{pmatrix}$$

und zu jedem Jordan-Block gehört genau ein Eigenvektor von f. Es gilt auch

$$e_1 = f(e_2), \qquad e_2 = f(e_3), \qquad \ldots$$

Sei $m = 1$, d. h. $f^1 = 0$. Sei $e_1, \ldots, e_d$ eine Basis von V. $V_i = \langle e_i \rangle$. Dann gilt:

$$V_1 \oplus \ldots \oplus V_d = \langle e_1 \rangle \oplus \ldots \oplus \langle e_d \rangle \cong \langle e_1, \ldots, e_d \rangle = V$$

$$\varrho_k(f) = \begin{cases} d & k = 1 \\ 0 & k \neq 1 \end{cases}, \qquad \operatorname{rk} f^i = \begin{cases} 0 & i > 0 \\ d & i = 0 \end{cases}$$

Betrachte auch die Formel:

$$i \geq 1: \quad \sum_{k=i+1}^{d} 0 = 0$$

$$i = 0: \quad 1\varrho_1(f) = \operatorname{rk} f^0 = d$$

Die Formel gilt also ebenfalls.

Sei nun $m > 1$. Dann ist $f^1 \neq 0$, denn sonst wäre $m = 1$. Wir betrachten $W = \ker f$. Wegen $f \neq 0$ ist $W \subsetneq V$. W ist auch f-invariant. Betrachte nun

$$\bar{f} : V/W \to V/W, \qquad v + W \mapsto f(v) + W.$$

Diese Abbildung ist wohldefiniert, da W f-invariant ist. Wegen $f^m = 0$ ist dann auch $\bar{f}$ nilpotent.

Behauptung: $\operatorname{ord} \bar{f} < m = \operatorname{ord} f$ bzw. $\bar{f}^{m-1} = 0$.

Sei $\bar{v} = v + W \in V/W$. Es gilt $\bar{f}^{m-1}(\bar{v}) = f^{m-1}(v) + W$ und wir wissen $f^m(v) = 0$. Also gilt

$$f\left(f^{m-1}(v)\right) = 0,$$

d.h. $f^{m-1}(v) \in \ker f = W$. Daraus folgt: $\bar{f}^{m-1}(\bar{v}) = 0 + W$. Also ist $\operatorname{ord} \bar{f} < m = \operatorname{ord} f$.

Nach Induktionsvoraussetzung (angewendet auf $\bar{f}$) gilt nun:

$$V/W \cong \bar{V}_1 \oplus \ldots \oplus \bar{V}_{\bar{r}} \qquad \text{für } \bar{V}_i \subset V/W \ \bar{f}\text{-zyklische Teilräume}$$

Seien nun $\bar{v}_1, \ldots, \bar{v}_{\bar{r}}$ jeweils die Hauptvektoren. Wir wählen jetzt $v_1, \ldots, v_{\bar{r}} \in V$ mit $v_i + W = \bar{v}_i$.

Sei $V_i = \left\langle v_i, f(v_i), f^2(v_i), \ldots \right\rangle$. Dann ist die

Behauptung: $\dim V_i = \dim \bar{V}_i + 1$.

Seien $d_i = \dim \bar{V}_i$. Die Bilder von $v_i, f(v_i), f^2(v_i), \ldots, f^{d_i-1}(v_i)$ in V/W bilden genau die zyklische Basis von $\bar{V}_i$ zum Hauptvektor $\bar{v}_i$. Insbesondere sind $v_i, f(v_i), f^2(v_i), \ldots, f^{d_i-1}(v_i)$ linear unabhängig in V_i. Damit ist

$$\dim V_i \geq d_i.$$

Der Vektor $f^{d_i}(v_i)$ hat nun das Bild $\bar{f}^{d_i}(\bar{v}_i) = 0$ in V/W, d.h. $f^{d_i} \in W = \ker f$. Also ist $f^{d_i+1}(v_i) = 0$ und daraus folgt:

$$\dim V_i \leq d_i + 1$$

Sei $\sum_{j=0}^{d_i} a_j f^j(v_i) = 0$. Dann ist $\sum_{j=0}^{d_i} a_j \bar{f}^j(\bar{v}_i) = 0$ und wegen $\bar{f}^{d_i} = 0$ ist auch $\sum_{j=0}^{d_i-1} a_j \bar{f}^j(\bar{v}_i) = 0$.

$\bar{v}_i, \bar{f}(\bar{v}_i), \ldots, \bar{f}^{d_i-1}(\bar{v}_i)$ ist eine zyklische Basis von $\bar{V}_i$, d.h. $a_0 = a_1 = \ldots = a_{d_i-1} = 0$. Nun gilt:

$$a_{d_i} f^{d_i}(v_i) = 0$$

Zu zeigen ist jetzt $f^{d_i}(v_i) \neq 0$, denn dann ist $a_{d_i} = 0$ und die Vektoren sind linear unabhängig.

Fall $f^{d_i}(v_i) = 0$, dann ist $f^{d_i-1}(v_i) \in \ker f = W$ und das bedeutet $\bar{f}^{d_i-1}(\bar{v}_i) = 0$ in V/W. Das ist ein Widerspruch zur Wahl von $\bar{v}_i$ als Basisvektor.

Also ist v_i ein Hauptvektor für V_i und es ist $\dim V_i = d_i + 1$.

Behauptung: Die natürliche Abbildung $V_1 \oplus \ldots \oplus V_{\bar{r}} \to V$ ist injektiv.

Beweis. Sei $0 = \sum_{i=1}^{\bar{r}} \sum_{k=0}^{d_i} c_{k,i} f^k(v_i)$. Das schreiben wir um zu

$$\sum_{i=1}^{\bar{r}} \sum_{k=0}^{d_i-1} c_{k,i} f^k(v_i) = -\sum_{i=1}^{\bar{r}} c_{d_i,i} \underbrace{f^{d_i}(v_i)}_{\in W = \ker f} \in W,$$

d.h. die linke Seite hat jetzt das Bild 0 in V/W. Die $\bar{f}^k(\bar{v}_i)$ bilden eine Basis von V/W, sind also insbesondere linear unabhängig.

Also: $c_{k,i} = 0$ für $i = 1, \ldots, \bar{r}$ und $k = 0, \ldots, d_i - 1$, d.h. die linke Seite ist gleich 0, d.h. die rechte Seite ist gleich 0:

$$\sum_{i=1}^{\bar{r}} c_{d_i,i} f^{d_i}(v_i) = 0$$

Das können wir auch schreiben als

$$\underbrace{f\left(\sum_{i=1}^{\bar{r}} c_{d_i,i} f^{d_i-1}(v_i)\right)}_{=:w}$$

Also: $w \in \ker f$ bzw. das Bild in V/W ist 0.

Die $\bar{f}^{d_1-1}(\bar{v}_1), \bar{f}^{d_2-1}(\bar{v}_2), \ldots$ sind also linear unabhängig in V/W, d.h. $c_{d_i,i} = 0$. Damit ist die Injektivität gezeigt. ✓

Behauptung: Es gibt einen linearen Unterraum $W' \subset W$, so dass

$$V_1 \oplus \ldots \oplus V_{\bar{r}} \oplus W' \to V$$

ein Isomorphismus ist. (W' hat eine Basis aus Eigenvektoren von f, also zyklische 1-dimensionale Teilräume. $\Rightarrow$ Zerlegung von V wie gesucht.)

Beweis. *Behauptung:* Zu $v \in V$ gibt es ein $w \in W$ mit $v + V' = w + V'$ in V/V' wobei $V' = V_1 + \ldots + V_{\bar{r}}$.

Beweis. Betrachte $\bar{v} = v + W$ in $V/W = \bar{V}_1 \oplus \ldots \oplus \bar{V}_{\bar{r}}$:

$$\bar{v} = \sum_{i=1}^{\bar{r}} \sum_{k=0}^{d_i - 1} c_{k,i} \bar{f}^k (\bar{v}_i)$$

Das bedeutet:

$$w = v - \underbrace{\sum_{i=1}^{r} \sum_{k=0}^{d_i - 1} c_{k,i} f^k (v_i)}_{\in V'} \in W$$

Also gilt: $v = v' + w$ mit $v' \in V$, $w \in W$. Oder: $v - w = v' \in V'$. ✓

Wir ergänzen nun unsere Basis von V' zu einer Basis von V. Neue Elemente $e_1, \ldots, e_s$ werden ersetzt durch Elemente $e'_1, \ldots, e'_s$ in W:

$$e_j = e'_j \in V', \qquad W' = \langle e'_1, \ldots, e'_s \rangle \subset W$$

$e'_1 + V', \ldots, e'_j + V'$ ist eine Basis von V/V'. Wir erhalten also immer noch eine Basis von V von der gesuchten Form. ✓

Formeln:

$$\begin{aligned}
i = 0: \quad & \sum_{k=1}^{r} k \varrho_k (f) = \dim V = \operatorname{rk} f^0 \\
i > 0: \quad & \sum_{k=i+1}^{r} (k - i) \varrho_k (f) = \sum_{k=i+1}^{r} (k - 1 - (i-1)) \varrho_{k-1} (\bar{f}) \quad && (\text{denn } \varrho_k (f) = \varrho_{k-1} (\bar{f})) \\
& = \sum_{\bar{k}=i}^{r} (\bar{k} - (i-1)) \varrho_{\bar{k}} (\bar{f}) && (\text{nach Induktionssannahme; } \bar{k} = k - 1) \\
& = \operatorname{rk} \bar{f}^{i-1}
\end{aligned}$$

Behauptung: $\operatorname{rk} f^i = \operatorname{rk} \bar{f}^{i-1}$.

Beweis. Es gilt nach der Dimensionsformel:

$$\begin{aligned}
\operatorname{rk} \bar{f}^{i-1} &= \dim V/W - \dim \ker \bar{f}^{i-1} \\
&= \dim V - \dim W - \dim \ker \bar{f}^{i-1} \\
\operatorname{rk} f^i &= \dim V - \dim \ker f^i
\end{aligned}$$

Also ist zu zeigen: $\dim \ker \bar{f}^{i-1} = \dim \ker f^i - \dim W$. Dafür genügt es zu zeigen: $\ker \bar{f}^{i-1} = \ker f^i / W$.

Sei also $v \in \ker f^i$. Dann ist $f\left(f^{i-1}(v)\right) = 0$, d. h. $f^{i-1}(v) \in \ker f = W$ und das bedeutet $\bar{f}^{i-1}(v + W) = 0$ in V/W. Das ist äquivalent zu $v + W \in \ker \bar{f}^{i-1}$. □

Beweis (von Theorem 10.1). Sei K algebraisch abgeschlossen, $\dim V < \infty$, $f : V \to V$ linear.

Nach Satz 10.5 gilt

$$V \cong V'_{\lambda_1} \oplus \ldots \oplus V'_{\lambda_r},$$

wobei V'_{λ_i} der Hauptraum zum Eigenwert λ_i ist, d. h. $V'_{\lambda_i} = \ker (f - \lambda_i \operatorname{Id})^n$ für ein genügend großes n.

$g = (f - \lambda_i \operatorname{Id})|_{V'_{\lambda_i}}$ ist nilpotent. Nach Theorem 10.9 gilt daher:

$$V'_{\lambda_i} = V_1^i \oplus \ldots \oplus V_{r_i}^i,$$

wobei die $V_{r_i}^i$ g-zyklisch sind.

Die darstellende Matrix von $g|_{V_j^i}$ bezüglich einer g-zyklischen Basis ist ein Jordan-Block.

Die darstellende Matrix von $f|_{V_j^i}$ bezüglich der selben Basis $f = g + \lambda_i \operatorname{Id}$ ist $\begin{pmatrix} \lambda_i & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & \lambda_i \end{pmatrix}$.

Dies liefert die gesuchte Jordan-Basis. Die Eindeutigkeit folgt aus der Eindeutigkeit in 10.9. $\square$

06.07.

Beispiel (zum Beweis von Theorem 10.9). Sei $f : \mathbb{C}^5 \to \mathbb{C}^5$ gegeben durch die Multiplikation mit

$$A = \begin{pmatrix} \frac{7}{5} & 0 & \frac{4}{5} & \frac{6}{5} & \frac{14}{5} \\ \frac{1}{10} & 0 & -\frac{4}{5} & -\frac{6}{5} & \frac{1}{5} \\ \frac{3}{2} & 0 & 0 & 0 & 3 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & -2 \\ -\frac{7}{10} & 0 & -\frac{2}{5} & -\frac{3}{5} & -\frac{7}{5} \end{pmatrix}.$$

Offensichtlicher Eigenwert: 0 mit dem Eigenvektor $e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Zur Information: A ist nilpotent.

Wir betrachten $W = \ker f$, also das Gleichungssystem $Ax = 0$:

$$\begin{aligned} \frac{7}{5}x_1 + 0x_2 + \frac{4}{5}x_3 + \frac{6}{5}x_4 + \frac{14}{5}x_5 &= 0 \quad \Rightarrow \quad 2x_3 = -3x_4 \\ \frac{1}{10}x_1 + 0x_2 - \frac{4}{5}x_3 - \frac{6}{5}x_4 + \frac{1}{5}x_5 &= 0 \quad \Rightarrow \quad 2x_3 = -3x_4 \\ \frac{3}{2}x_1 + 0x_2 + 0x_3 + 0x_4 + 3x_5 &= 0 \quad \Rightarrow \quad x_1 = -2x_5 \\ -x_1 + 0x_2 + 0x_3 + 0x_4 - 2x_5 &= 0 \quad \Rightarrow \quad x_1 = -2x_5 \\ -\frac{7}{10}x_1 + 0x_2 - \frac{2}{5}x_3 - \frac{3}{5}x_4 - \frac{7}{5}x_5 &= 0 \quad \Rightarrow \quad 2x_3 = -3x_4 \end{aligned}$$

Also:

$$\ker f = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} \middle| \begin{aligned} x_1 &= -2x_5 \\ x_3 &= -\frac{3}{2}x_4 \end{aligned} \right\} = \left\langle \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}_{f_2}, \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -\frac{3}{2} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{f_4}, \underbrace{\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{f_5} \right\rangle$$

Betrachte $\bar{f} : V/W \to V/W$, $x + W \to Ax + W$ also $\mathbb{C}^5/\ker A$:

Neue Basis von $\mathbb{C}^5$: Ergänze Basis von $\ker A$ durch Elemente der Standardbasis zu einer Basis von $\mathbb{C}^5$:

$$f_1 = e_1, \qquad f_3 = e_3 \qquad \Rightarrow f_1, \ldots, f_5 \text{ Basis von } \mathbb{C}^5$$

Sei $\bar{f}_i = f_i + W \in V/W$. Dann ist $\bar{f}_1, \bar{f}_3$ eine Basis von V/W (da $\bar{f}_2 = \bar{f}_4 = \bar{f}_5 = 0 \Leftrightarrow f_2, f_4, f_5 \in \ker A$).

Darstellende Matrix von $\bar{f}$ bezüglich der Basis $\bar{f}_1, \bar{f}_3$:

$$\bar{f}\left(\bar{f}_1\right) = Af_1 + W = \begin{pmatrix} \frac{7}{5} \\ \frac{1}{10} \\ \frac{3}{2} \\ -1 \\ -\frac{7}{10} \end{pmatrix} + W = \alpha \bar{f}_1 + \beta \bar{f}_3$$

Schreibe $f(f_1)$ in der Basis $f_1, \ldots, f_5$:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \frac{7}{5} \\ \frac{1}{10} \\ \frac{3}{2} \\ -1 \\ -\frac{7}{10} \end{pmatrix} &= \alpha f_1 + \frac{1}{10}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta f_3 - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -\frac{3}{2} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{7}{10}\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= 0f_1 + 0f_3 + (\text{irgendwas in } \ker A) \end{aligned}$$

Denn:

$$\begin{aligned} \frac{7}{5} &= 1\alpha + 0 + 0 + 0 + \frac{14}{10} \quad &\Rightarrow \quad \alpha = 0 \\ \frac{3}{2} &= 1\beta + \frac{3}{2} \quad &\Rightarrow \quad \beta = 0 \end{aligned}$$

Also: $\bar{f}\left(\bar{f}_1\right) = 0\bar{f}_1 + 0\bar{f}_3$

Schreibe $f\left(f_3\right)$ in der Basis $f_1, \ldots, f_5$:

$$\begin{pmatrix} \frac{4}{5} \\ -\frac{4}{5} \\ 0 \\ 0 \\ -\frac{2}{5} \end{pmatrix} = \gamma f_1 - \frac{4}{5} f_2 + \delta f_3 - \frac{2}{5} f_5$$

Denn:

$$\frac{4}{5} = 1\gamma + \frac{4}{5} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} \gamma &= 0 \\ \delta &= 0 \end{aligned}$$

Also: $\bar{f}\left(\bar{f}_3\right) = 0\bar{f}_1 + 0\bar{f}_3$

Bestimme eine Jordanbasis für $\bar{f}$. $\bar{f} = 0 \Rightarrow$ beliebige Basis ist Jordanbasis. Wir wählen geschickterweise $\bar{f}_1, \bar{f}_3$.

Lifte $\bar{f}_1, \bar{f}_3$ nach V: Das sind f_1, f_3. Zyklische Basen für Unterräume: $\underbrace{f\left(f_1\right)}_{s_2}, \underbrace{f_1}_{s_1}$ und $\underbrace{f\left(f_3\right)}_{t_2}, \underbrace{f_3}_{t_1}$. Dies sind also gerade die ersten vier Elemente der Jordanbasis.

Ergänze s_1, s_2, t_1, t_2 durch ein Basiselement von $\ker A$ zu einer Basis des $\mathbb{C}^5$. Zum Beispiel mit (geratenem) f_2:

$$\begin{pmatrix} \frac{7}{5} \\ \frac{1}{10} \\ \frac{3}{2} \\ -1 \\ -\frac{7}{10} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{4}{5} \\ -\frac{4}{5} \\ 0 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \text{bilden eine Basis von } \mathbb{C}^5.$$

Die gesuchte Jordansche Normalform ist die darstellende Matrix bezüglich dieser Basis:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Denn:

$$\begin{aligned} f\left(s_1\right) &= 1s_2 + 0s_1 + 0t_2 + 0t_1 + 0f_2 \\ f\left(t_1\right) &= 0s_2 + 0s_1 + 1t_2 + 0t_1 + 0f_2 \end{aligned}$$

Formel:

$$\begin{aligned} \operatorname{rk} f^0 &= \operatorname{rk} \mathrm{Id} = 5 \\ \operatorname{rk} f &= \dim V - \dim \ker f = 5 - 3 = 2 \\ \operatorname{rk} f^2 &= \operatorname{rk} 0 = 0 \end{aligned}$$

$$\sum_{k=i+1}^{5} (k-i) \underbrace{\varrho_k(f)}_{\substack{\#\ \text{Jordankästchen} \\ \text{der Größe } k}} = \operatorname{rk} f^i, \qquad i = 0, \ldots, 4$$

$$i = 0: \qquad \sum_{k=1}^{5} k\varrho_k(f) = 5$$

$$i = 1: \qquad \sum_{k=2}^{5} (k-1)\varrho_k(f) = 2$$

$$i = 2: \qquad \sum_{k=3}^{5} (k-2)\varrho_k(f) = 0$$

Also:

$\varrho_1(f) = 1$ ein Jordankästchen der Größe 1

$\varrho_2(f) = 2$ zwei Jordankästchen der Größe 2

Bemerkung. Bestimmen der Jordanschen Normalform bedeutet wiederholtes Lösen von linearen Gleichungen.

Für die Größe der Jordankästchen muss die Basis nicht bestimmt werden.

Falls f nicht nilpotent, betrachte $f - \lambda \operatorname{Id}$ für einen Eigenwert λ. Algorithmus funktioniert nur, falls λ *einziger* Eigenwert ist.

Das Schwierigste ist das Bestimmen der Eigenwerte.

10.1 Anwendung: Die Normalform von Jordan-Chevalley

Definition 10.10. Ein Endomorphismus heißt *halbeinfach* (semi-simple), wenn er diagonalisierbar ist, *nilpotent*, falls $f^n = 0$, und *unipotent*, falls $f = \operatorname{Id} + n$, mit n nilpotent.

Korollar 10.11. *Sei K algebraisch abgeschlossen, V ein endlich-dimensionaler Vektorraum, $f : V \to V$ linear. Dann gilt: $f = f_s + f_n$ mit f_2 halbeinfach, f_n nilpotent und f vertauscht mit f_2 und f_n*

Ferner vertauschen f_s und f_n mit allen Endomorphismen, die mit f vertauschen.

f_s und f_n sind eindeutig durch diese Eigenschaft bestimmt.

Beweis. Wähle Jordanbasis von f. Die darstellende Matrix ist dann:

$$A = \begin{pmatrix} J_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & J_k \end{pmatrix} \qquad \text{mti } J_i \text{ Jordanblock}$$

Also ist:

$$J_i = \underbrace{\begin{pmatrix} \lambda_i & & & 0 \\ & \ddots & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_i \end{pmatrix}}_{\text{halbeinfach}} + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & 0 \end{pmatrix}}_{\text{nilpotent}}$$

Zusammenfassung dieser Zerlegungen gibt f_s und f_n.

Behauptung: f vertauscht mit f_s, f_n: $f \circ f_s = f_s \circ f$.

Es genügt, einen einzelnen Jordanblock zu betrachten:

$$J = \underbrace{\lambda \operatorname{Id}}_{f_s} + \underbrace{N}_{f_n} \qquad \text{mit } N \text{ nilpotent}$$

Also:

$$(\lambda \operatorname{Id}) \circ J = \lambda J = J \circ (\lambda \operatorname{Id})$$

Es gilt: $f_n = f - f_s$, also:

$$f \circ f_n = f \circ (f - f_s) = f^2 - f \circ f_s = f^2 - f_s \circ f = (f - f_s) \circ f = f_n \circ f$$

Sei g ein Endomorphismus, der mit f vertauscht. *Behauptung:* g vertauscht mit f_s.

Haupträume von f sind g-invariant:

$$x \in \ker (f - \lambda \operatorname{Id})^n \qquad \Rightarrow (f - \lambda \operatorname{Id})^n (g(x)) = g((f - \lambda \operatorname{Id})^n (x)) = g(0) = 0$$

Es genügt, die Aussage für f, g eingeschränkt auf einen solchen Hauptraum zu zeigen, d. h. o. B. d. A. $V = \ker (f - \lambda \operatorname{Id})^n$, λ der einzige Eigenwert. Nach Konstruktion: $f_s = \lambda \operatorname{Id}$, $f_n = f - \lambda \operatorname{Id}$. Offensichtlich gilt nun: $f_s \circ g = g \circ f_s$.

Damit:

$$f_n \circ g = (f - f_s) \circ g = f \circ g - f_s \circ g = g \circ f - g \circ f_s = g \circ f_n$$

07.07.

Eindeutigkeit: Sei $f = f_s' + f_n' = f_s + f_n$, wobei f_s', f_n' ebenfalls die Eigenschaften des Korollars haben. Dann gilt:

$(*)\qquad f_s - f_s' = f_n' - f_n$

f_n und f_n' sind nilpotent:

$$f_n{}^k = 0, \qquad f_n'{}^l = 0$$

Es gilt nun:

$$\left(f_n' - f_n\right)^{k+l} = \sum_{i=0}^{k+l} \binom{k+l}{i} f_n'{}^i f_n{}^{k+l-i} \left(-1\right)^{k+l-i}$$

Entweder ist $i \geq l$ (also $f_n'{}^i = 0$) oder $k + l - i \geq k$ (also $f_n{}^{k+l-i} = 0$). Das heißt in jedem Fall:

$$\left(f_n' - f_n\right)^{k+l} = 0$$

Also ist die rechte Seite von $(*)$ nilpotent.

f_s, f_s' vertauschen und sind beide diagonalisierbar. Also gibt es eine simultane Eigenbasis:

Eigenraum $V_\lambda\left(f_s\right)$ ist f_s'-invariant. Man hat:

$$V = V_1 \oplus V_2 \oplus \ldots \oplus V_k$$

f_s' ist diagonalisierbar, alle V_i sind f_s'-invariant. Daraus folgt: $f_s'|_{V_i}$ ist diagonalisierbar:

$$\chi_{f_s'} = \prod \chi_{f_s'|_{V_i}}, \qquad \mu_{f_s'} = \prod \mu_{f_s'|_{V_i}}$$

$\chi_{f_s'} = \mu_{f_s'}$ und $\chi_{f_s'|_{V_i}} = \mu_{f_s'|_{V_i}}$, also herrscht jeweils Gleichheit.

Vereinigung der Eigenbasen aller $V_\lambda\left(f_s\right)$ für $f_s'|_{V_\lambda(f_s)}$ ist die gesuchte simultane Eigenbasis.

Die darstellenden matrizen von f_s, f_s' bezüglich dieser Basis sind Digonalmatrizen. Also ist die Matrix von $f_s - f_s'$ ebenfalls diagonal. Die Linke Seite von $(*)$ ist also diagonalisierbar.

Aber:

$$\text{diagonalisierbar} = \text{nilpotent} \qquad \Rightarrow \text{verschwindet}$$

Also gilt $f_n = f_n'$ und $f_s = f_s'$. Das war die Eindeutigkeit. □

Bemerkung (Korrektur). Die Jordan-Chevalley-Zerlegung gilt für alle perfekten Körper z. B. $\mathbb{Q} \subset K$ (Näheres dazu in der Algebra I).

Satz 10.12 (Multiplikative Version der Jordan-Chevalley-Zerlegung). *Sei K algebraisch abgeschlossen, V ein endlich-dimensionaler Vektorraum, $f : V \to V$ ein Automorphismus (d. h. f sei invertierbar). Dann gilt:*

$$f = f_s \circ f_n$$

mit f_s halbeinfach, f_n unipotent (Id +nilpotent), f_s, f_n vertauschen mit allen g, die mit f vertauschen. Sie sind dadurch eindeutig bestimmt.

Beweis. Jordansche Normalform von f:

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 1 & & & & 0 \\ & \ddots & \ddots & & & \\ & & \ddots & 0 & & \\ & & & \ddots & \ddots & \\ & & & & \ddots & 0 \\ 0 & & & & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

f_s: Zugehörige Diagonalmatrix. f invertierbar, also alle Eigenwerte ungleich Null, f_s invertierbar.

$f_n = f_s{}^{-1} \circ f$ hat Matrix $\begin{pmatrix} 1 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix}$, ist also unipotent. Der Rest wie im additiven Fall. □

Alternativer Beweis ($K = \mathbb{R}, \mathbb{C}$):

$$\exp : M_n\left(K\right) \to \mathrm{GL}_n\left(K\right), \qquad A = A_s + A_n \mapsto \exp A = \exp A_s \cdot \exp A_n$$

Bemerkung. Dies gilt auch für K nicht algebraisch abgeschlossen. Der Beweis ist einfach, benutzt aber Galois-Theorie (Algebra I).

Beispiel. $K = \mathbb{R}$. $A \in M_n(\mathbb{R}) \subset M_n(\mathbb{C})$. Dann gilt:

$$A = A_s + A_n \qquad \text{mit } A_s \in M_n(\mathbb{C}) \text{ diagonalisierbar, } A_n \in M_n(\mathbb{C}) \text{ nilpotent}$$

Komplexe Konjugation:

$$A = \bar{A} = \bar{A}_s + \bar{A}_n \qquad \text{mit } \bar{A}_s \in M_n(\mathbb{C}) \text{ diagonalisierbar, } \bar{A}_n \in M_n(\mathbb{C}) \text{ nilpotent}$$

Wegen der Eindeutigkeit der Jordan-Chevalley-Zerlegung gilt $A_s = \bar{A}_s$ und $A_n = \bar{A}_n$, also sind bereits $A_s, A_n \in M_n(\mathbb{R})$.

f heißt *halbeinfach*, falls f diagonalisierbar über $\bar{K}$.

10.2 Lineare Gruppen

Im Vorlauf der Linearen Algebra haben wir viele Gruppen eingeführt. Seien K ein Körper und V ein endlich-dimensionaler K-Vektorraum.

10.2.1 Automorphismengruppe $\mathrm{GL}(V)$

$$\mathrm{GL}(V) = \mathrm{Aut}(V) = \{f : V \to V : f \text{ linear, bijektiv}\}$$

Neutrales Element: Id
Inverses: f bijektiv, linear $\Rightarrow f^{-1}$ bijektiv, linear.

$$\mathrm{GL}_n(K) = \{A \in M_{n\times n}(K) : A \text{ invertierbar}\}$$

Neutrales Element: Id
Inverses: A^{-1} existiert.

Da $\dim V < \infty$, ergibt sich durch Wahl einer Basis: $\mathrm{GL}(V) \cong \mathrm{GL}_n(K)$ (allgemeine lineare Gruppe, *general linear group*)

10.2.2 Spezielle lineare Gruppe $\mathrm{SL}(V)$

$$\mathrm{SL}(V) = \{f \in \mathrm{GL}(V) : \det f = 1\}$$

$\det(f \circ g) = \det f \cdot \det g = 1 \cdot 1 = 1$
Neutrales Element: $\det \mathrm{Id} = 1$ Inverses: $\det f^{-1} = (\det f)^{-1} = 1$

Spezielle lineare Guppe:

$$\mathrm{SL}_n(K) = \{A \in M_{n\times n}(K) : \det A = 1\}$$

$\det A = 1 \Rightarrow A$ invertierbar

10.2.3 Orthogonale Gruppe $\mathrm{O}(V)$

$K = \mathbb{R}$, V euklidischer Vektorraum.

$$\mathrm{O}(V) = \{f \in \mathrm{GL}(V) : f \text{ orthogonal, d.h. } \langle f(x), f(x)\rangle = \langle x, y\rangle\}$$

$$\mathrm{O}(n) = \left\{A \in M_{n\times n}(\mathbb{R}) : A^t A = \mathrm{Id}\right\}$$

Wahl einer Orthonormalbasis für V liefert : $\mathrm{O}(V) \cong \mathrm{O}(n)$

10.2.4 Spezielle Orthogonale Gruppe $\mathrm{SO}\,(V)$

$$\mathrm{SO}\,(V) = \mathrm{O}\,(V) \cap \mathrm{SL}\,(V)$$
$$\mathrm{SO}\,(n) = \mathrm{O}\,(n) \cap \mathrm{SL}_n\,(\mathbb{R})$$

Bemerkung. f orthogonal $\Rightarrow \det f = \pm$ ($\det f = 1$: die Abbildung ist orientierungserhaltend).

10.2.5 Unitäre Gruppe $\mathrm{U}\,(V)$

$K = \mathbb{C}$, V unitär.

$$\mathrm{U}\,(V) = \{f \in GL\,(V) : f \text{ unitär}\}$$
$$\mathrm{U}\,(n) = \left\{A \in M_{n\times n}\,(\mathbb{C}) : \bar{A}^t A = \mathrm{Id}\right\}$$

Wahl einer Orthonormalbasis liefert : $\mathrm{U}\,(V) \cong \mathrm{U}\,(n)$.

10.2.6 Spezielle unitäre Gruppe $\mathrm{SU}\,(V)$

$$\mathrm{SU}\,(V) = \mathrm{U}\,(V) \cap SL\,(V)$$
$$\mathrm{SU}\,(n) = \mathrm{U}\,(n) \cap SL_n\,(\mathbb{C})$$

Bemerkung. f unitär $\Rightarrow |\det f| = 1$.

Die Beispiele 3–6 sind Teilmengen von $M_{n\times n}\,(\mathbb{R}) \cong \mathbb{R}^{n^2}$ bzw. $\mathbb{C}^{n^2}$. Das liefert Topologien auf diesen Gruppen. Also ist auch Differentialrechnung in diesen Gruppen möglich. Das führt zu Lie-Gruppen.

10.2.7 Orthogonale Gruppe $\mathrm{O}\,(V, s)$ zu einer Bilinearform s

K beliebig und $s : V \times V \to K$ eine Bilinearform

$$\mathrm{O}\,(V, s) = \{f \in \mathrm{Aut}\,(V) : s\,(f\,(v)\,, f\,(w)) = s\,(v)\,, w \text{ für alle } v, w \in V\}$$

Konkret: Sei $M \in M_{n\times n}\,(K)$:

$$\left\{A \in \mathrm{GL}_n\,(K) : A^t M A = M\right\}$$

Beispiel. $K = \mathbb{R}$, $M = \begin{pmatrix} 1 & & & 0 \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ 0 & & & -1 \end{pmatrix}$ liefert die »Metrik« der Relativitätstheorie. Das liefert die Lorentzgruppe.

10.2.8 Symplektische Gruppe $\mathrm{Sp}\,(V)$

s heißt *symplektisch*, falls s schiefsymmetrisch (d. h. $s\,(v, w) = -s\,(v, w)$), nicht-degeneriert (d. h. $s\,(v, \cdot) = 0 \Rightarrow v = 0$ und $s\,(\cdot, w) = 0 \Rightarrow w = 0$).

$$\mathrm{Sp}\,(V) = O\,(V, s)$$

Sei $M = \begin{pmatrix} 0 & \mathrm{Id} \\ -\mathrm{Id} & 0 \end{pmatrix}$:

$$\mathrm{Sp}\,(n) = \left\{A \in \mathrm{GL}_n\,(K) : A^t M A = M\right\}$$

Bemerkung. Selbstadjungierte Abbildungen ($\langle f\,(v)\,,\ w\rangle = \langle v,\ f\,(w)\rangle$ bilden *keine* Gruppe.)

10.2.9 Matrizengruppen

Diagonalmatrizen in $\mathrm{GL}_n(K)$:

$$\mathrm{D}_n = \mathrm{T}_n$$

Obere Dreiecksmatrizen in $\mathrm{GL}_n(K)$:

$$\mathrm{B} \qquad \text{(nach Borel)}$$

Obere Dreiecksmatrizen in mit Diagonale 1:

$$\begin{pmatrix} 1 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix}$$

10.2.10 Gruppe der Projektivitäten $\mathrm{PGL}(V)$

$\mathrm{PGL}(V) = \mathrm{Aut}(\mathbb{P}(V)) = \{f : \mathbb{P}(V) \to \mathbb{P}(V) : f \text{ induziert von einer bijektiven, linearen Abbildung } V \to V\}$

$$\mathrm{PGL}_n(K) = \mathrm{Aut}\left(\mathbb{P}^{n-1}\right) = GL_n(K)/\sim \qquad \text{mit } A \sim \lambda A \text{ für } \lambda \in K^*$$

Dazu wieder möglich:

$$\mathrm{PSL}_n(K), \qquad \mathrm{PSL}(V), \qquad \ldots$$

10.2.11 Gruppe der affinen Abbildungen $\mathrm{Aff}(A)$

Sei A affiner Raum über V.

$$\mathrm{Aff}(A) = \{f : A \to A : f \text{ affin, bijektiv}\}$$

$A = K^n$

$$\mathrm{Aff}(A) \cong \left\{ M \in \mathrm{GL}_{n+1}(K) : M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ b & & & B \end{pmatrix},\ b \in K^n,\ B \in \mathrm{GL}_n(K) \right\}$$

Die Jordansche Normalform hat in diesen Gruppen oft eine einfachere Form.

Satz 10.13. *Sei V ein endlich-dimensionaler unitärer Vektorraum und $f \in \mathrm{U}(V)$. Dann ist f diagonalisierbar. Es gibt eine Orthonormalbasis von V, bezüglich derer f Diagonalgestalt hat.*

Beweis. Sei $V - 1 \in V$ Eigenvektor von f zum Eigenwert λ_1. (Es gilt nach 6.13: $|\lambda_1| = 1$.) Setze:

$$e_1 = \frac{v_1}{\|v_1\|}$$

Sei

$$W = \langle v_1 \rangle^{\perp} = \{w \in V : \langle w, v_1 \rangle = 0\}$$

Behauptung: $f(W) \subset W$.

Sei $w \in W$. Dann ist:

$$\underbrace{\lambda_1}_{\neq 0} \langle f(w), v_1 \rangle = \langle f(w), \lambda_1 v_1 \rangle = \langle f(w), f(v_1) \rangle = \langle w, v_1 \rangle = 0$$

Also: $0 = \langle f(w), v_1 \rangle \Rightarrow f(w) \in W$.

Weiter mit vollständiger Induktion. □

13.07.

Satz 10.14. *Sei V ein euklidischer Vektorraum,* $\dim V < \infty$*,* $f : V \to V$ *orthogonal. Dann gibt es eine Orthonormalbasis, so dass die darstellende Matrix die folgende Form hat:*

$$\begin{pmatrix} 1 &&&&&&&& \\ & \ddots &&&&&&& \\ && 1 &&&&&& \\ &&& -1 &&&&& \\ &&&& \ddots &&&& \\ &&&&& -1 &&& \\ &&&&&& C_{\alpha_1} && \\ &&&&&&& \ddots & \\ &&&&&&&& C_{\alpha_i} \end{pmatrix} \quad \textit{mit } C_\alpha = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \textit{ (Drehung um } \alpha\textit{)}$$

Beweis. Fasse f als unitäre Abbildung auf:

$$f_{\mathbb{C}} : V_{\mathbb{C}} \to V_{\mathbb{C}} = V \otimes \mathbb{C}$$

(Die Matrix zu f wird in $M_n(\mathbb{C})$ aufgefasst.) Das charakteristische Polynom ändert sich dabei nicht: $\chi_f = \chi_{f_{\mathbb{C}}}$.

$\Rightarrow V_{\mathbb{C}}$ hat eine Orthonormalbasis aus Eigenvektoren von $f_{\mathbb{C}}$. Die Eigenwerte erfüllen $|\lambda_j| = 1$, also $\lambda_i = \pm 1 \in \mathbb{R}$, d. h. χ_f hat eine Nullstelle in $\mathbb{R}$, also: f hat einen Eigenvektor bereits in V.

Für $\lambda_j \neq 1, -1$: $\lambda_j = \cos\alpha_j + \mathrm{i}\sin\alpha_j$. Sei v_j der zugehörige Eigenvektor. Dann gilt:

$$f(\bar{v}_j) = \bar{\lambda}_j \bar{v}_j$$

Also ist $\bar{v}_j$ Eigenvektor zum Eigenwert $\bar{\lambda}_j$.

Man kann v_j schreiben als $v_j = \operatorname{Re} v_j + \mathrm{i} \operatorname{Im} v_j$. Es gilt:

$$\langle v_j, \bar{v}_j \rangle_{V_{\mathbb{C}}} = \langle \operatorname{Re} v_j, \operatorname{Im} v_j \rangle$$

Denn:

$$\begin{aligned} v_j + \bar{v}_j &= 2 \operatorname{Re} v_j \\ \frac{1}{\mathrm{i}}(v_j - \bar{v}_j) &= 2 \operatorname{Im} v_j \end{aligned}$$

Dabei sind $\operatorname{Re} v_j, \operatorname{Im} v_j \in V$. Matrix von f bezüglich $\langle \operatorname{Re} v_j, \operatorname{Im} v_j \rangle$:

$$\begin{aligned} f(\operatorname{Re} v_j) &= \frac{1}{2}(f(v_j) + f(\bar{v}_j)) = \frac{1}{2}\left(\lambda_j v_j + \bar{\lambda}_j \bar{v}_j\right) = \ldots = \cos\alpha \operatorname{Re} v_j + \sin\alpha \operatorname{Im} v_j \\ f(\operatorname{Im} v_j) &= \ldots = -\sin\alpha \operatorname{Re} v_j + \cos\alpha \operatorname{Im} v_j \end{aligned}$$

□

Bemerkung. Eine Jordanbasis existiert für $f : V \to V$ mit $\dim V < \infty$, K beliebig genau dann, wenn das charakteristische Polynom χ_f über K in Linearfaktoren zerfällt.

11 Algebren

Definition 11.1. Sei K ein Körper. Eine K-Algebra ist eine Menge A zusammen mit

Addition	$+:$	$A \times A \to A$
Multiplikation	$\cdot:$	$A \times A \to A$
Skalarmultiplikation	$\cdot:$	$K \times A \to A,$

so dass $(A, +, \cdot)$ ein Ring ist, $(A, +, \text{Skalarmultiplikation})$ ein Vektorraum ist und

$$\lambda (ab) = (\lambda a)\, b = a\, (\lambda b) \qquad \text{für alle } \lambda \in K,\ a, b \in A$$

gilt (d. h. die Multiplikation ist bilinear).

A heißt *kommutativ*, falls die Multiplikation kommutativ ist, d. h.

$$ab = b \qquad \text{für alle } a, b \in A.$$

A ist eine *Algebra mit Eins*, falls es ein Element $1 \in A$ gibt mit

$$1a = a1 = a \qquad \text{für alle } a \in A$$

Beispiel.

1. $M_{n\times n}(K)$ mit Addition und Multiplikation von Matrizen und der gewöhnlichen Skalarmultiplikation ist eine (nicht-kommutative) K-Algebra mit Eins. Die Einheitsmatrix spielt die Rolle des Eins-Elements.
2. Sei V ein Vektorraum. Dann ist $\mathrm{End}(V)$ eine Algebra bezüglich $+$, $\circ$ (Hintereinanderausführung), Skalarmultiplikation. Das Einselement ist die identische Abbildung.
3. Die Polynome in einer Variablen $K[X]$ bilden eine kommutative Algebra mit Eins (siehe Abschnitt 5.3 auf Seite 6).
4. Der Polynomring in n Variablen $K[X_1, \ldots, X_n]$ ist eine kommutative Algebra mit Eins.
5. Sei M eine Menge. Dann ist
   $$\mathrm{Abb}(M, K) = \{f : M \to K : f \text{ Abbildung}\}$$
   mit der Addition und Multiplikation von Funktionen eine kommutative Algebra mit Eins.
6. Sei U ein topologischer Raum. Dann ist
   $$\mathrm{C}(U, \mathbb{R}) = \{f : U \to \mathbb{R} : f \text{ stetig}\}$$
   eine $\mathbb{R}$-Algebra mit Eins.
7. Die Menge
   $$\mathrm{C}_c(\mathbb{R}, \mathbb{R}) = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : f \text{ stetig mit kompaktem Träger}\}$$
   ist eine kommutative $\mathbb{R}$-Algebra ohne Eins. (Das Einselement wäre die konstante Funktion $1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto 1$, doch deren Träger ist nicht kompakt!)

   (*Kompakter Träger*: Es gibt ein $N \geq 0$ mit $f(x) = 0$ für alle x mit $|x| > N$.)

Definition 11.2. Ein K-Algebrenhomomorphismus ist eine K-lineare Abbildung $f : A \to B$ zwischen K-Algebren, die zusätzlich ein Ringhomomorphismus ist:

$$f(a+b) = f(a) + f(b), \qquad f(ab) = f(a)\, f(b), \qquad f(\lambda a) = \lambda f(a), \qquad \text{für } a, b \in A, \lambda \in K$$

Ein Homomorphismus von Algebren mit Eins muss zusätzlich $f(1) = 1$ erfüllen.

Ein Homomorphismus heißt *Isomorphismus*, wenn er bijektiv ist.

Beispiel.

1. Sei $\dim V = n < \infty$. Die Wahl einer Basis von V induziert einen Isomorphismus von Algebren mit Eins $\operatorname{End}(V) \to M_{n\times n}(K)$ mit $f \mapsto M^{v_1,\ldots,v_n}_{v_1,\ldots,v_n}(f)$ (darstellende Matrix).

2. Die Abbildung

$$\mathrm{ev} : K[X] \to \operatorname{Abb}(K,K), \qquad P(X) = \sum_{i=0}^{n} a_i X^i \mapsto \left(f_P : K \to K, \quad \alpha \mapsto P(\alpha) = \sum_{i=0}^{n} a_i \alpha^i \right)$$

heißt *Auswertungsabbildung*.

Lemma 11.3. ev *ist injektiv, wenn K unendlich viele Elemente hat. (z. B. $K = \mathbb{R}$).*

Beweis. ev ist K-linear, daher genügt es, den Kern zu betrachten.

Sei $P(X) \in \ker \mathrm{ev}$, d. h. $P(X) = \sum\limits_{i=0}^{n} a_i X^i$ ($n = \deg P$, d. h. $a_n \neq 0$) mit $P(\alpha) = 0$ für alle $\alpha \in K$.

Seien jetzt $\alpha_1, \ldots, \alpha_{n+1}$ verschiedene Elemente von K (geht, da $|K| = \infty$) mit $P(\alpha_1) = P(\alpha_2) = \ldots = P(\alpha_n) = 0$. Nach Satz 5.8 auf Seite 7 gilt:

$$P(X) = (X - \alpha_1)(X - \alpha_2)\cdots(X - \alpha_n)$$

Einsetzen von α_{n+1}:

$$0 = P(\alpha_{n+1}) = \underbrace{\underbrace{(\alpha_{n+1} - \alpha_1)}_{\neq 0}\underbrace{(\alpha_{n+1} - \alpha_2)}_{\neq 0}\cdots\underbrace{(\alpha_{n+1} - \alpha_n)}_{\neq 0}}_{\neq 0}$$

Das ist ein Widerspruch! Also ist $n = 0$, $P(X) = a_0 = 0$, d. h. $P(X) = 0 \in K[X]$. □

Beispiel. Sei V ein K-Vektorraum, $f \in \operatorname{End}(V)$. Dann gibt es einen Homomorphismus von Algebren mit Eins:

$$K[V] \to \operatorname{End}(V), \qquad P \mapsto P(f).$$

$\dim V < \infty$. Cayley-Hamilton (Satz 5.15 auf Seite 11) besagt: $\chi_f(f) = 0$. Dieser Homomorphismus ist also nicht injektiv.

Definition 11.4. Sei V ein K-Vektorraum. Die *Tensoralgebra* $T^*(V)$ ist der Vektorraum

$$\bigoplus_{i=0}^{\infty} T^i(V) \qquad \text{mit } T^i(V) = \underbrace{V \otimes V \otimes \ldots \otimes V}_{i \text{ Faktoren}},\ T^0(V) = K,\ T^1(V) = V$$

Seien $v = (v_0, v_1, v_2, \ldots)$, $v_i \in T^i(V)$ fast alle 0 und $w = (w_0, w_1, w_2, \ldots)$, $w_i \in T^i(V)$ fast alle 0.

$$v \otimes w = \Big(\underbrace{v_0 \otimes w_0}_{= v_0 \cdot w_0 \in K}, \underbrace{v_0 \otimes w_1 + v_1 \otimes w_0}_{= v_0 \cdot w_1 + v_1 \cdot w_0 \in V}, v_0 \otimes w_2 + v_1 \otimes w_1 + v_2 \otimes w_0, \ldots \Big)$$

$$(v \otimes w)_i = \sum_{j+l=i} v_j \otimes w_l$$

mit $\otimes$ als Multiplikation.

Bemerkung. Wir identifizerien $T^i(V)$ mit seinem Bild in $T^*(V)$ bezüglich der Abbildung

$$v_i \mapsto (0, \ldots, 0, 1, 0 \ldots, 0).$$

Dann gilt:

$$(v_0, v_1, v_2, \ldots) = v_0 + v_1 + v_2 + \ldots + v_n \qquad \text{(endliche Summe)}$$

Lemma 11.5. *$T^*(V)$ ist eine K-Algebra mit Eins.*

Beweis. Das ist ein Vektorraum nach Definition, insbesondere ist $(T^*(V), +)$ eine kommutative Gruppe.

Assoziativität der Multiplikation:

$$\begin{aligned}((v \otimes w) \otimes u)_i &= \sum_{j+l=i} (v \otimes w)_j \otimes u_l \\ &= \sum_{j+l=i} \sum_{n+m=j} (v_n \otimes w_m) \otimes u_l \\ &= \sum_{n+m+l=i} (v_n \otimes w_m) \otimes u_l \\ &= \sum_{n+m+l=i} v_n \otimes (w_m \otimes u_l) \qquad \text{nach 7.24, 2.} \\ &= (v \otimes (w \otimes u))_i\end{aligned}$$

Verträglichkeit von $\otimes$ und $+$ gilt nach 7.19 b), Verträglichkeit mit Skalarmultiplikation nach 7.19 a) (siehe Seite 31).

Einselement ist $(1, 0, 0, \ldots) = 1 \in T^0(V) = K$. □

20.07.

Satz 11.6 (universelle Eigenschaft). *Jede lineare Abbildung $f : V \to A$ eines K-Vektorraums V in eine K-Algebra mit Eins kann eindeutig zu einem Homomorphismus $F : T^*(V) \to A$ von K-Algebren mit Eins fortgesetzt werden, d. h. zu einem Algebrenhomomorphismus F mit $F|_V = f$.*

Beweis. $f : V \to A$ ist K-linear und damit ist

$$f_m : \underbrace{V \times V \times \ldots \times V}_{m \text{ Faktoren}} \to A, \qquad f_m(v_1, \ldots, v_m) := \underbrace{\underbrace{f(v_1)}_{\in A} \cdot \underbrace{f(v_2)}_{\in A} \cdots \underbrace{f(v_m)}_{\in A}}_{\in A}$$

linear in jeder Variablen. Damit faktorisiert f_m über die lineare Abbildung $F_m : \underbrace{V \otimes V \otimes \ldots \otimes V}_{m \text{ Faktoren}} \to A$ (siehe universelle Eigenschaft des Tensorproduktes!). Setze $F_0 : K \to A$, $F_0(\lambda) := \lambda 1$ (zwingend, da sowohl $T^*(V)$ als auch A K-Algebra mit Eins sind).

Dann ist $F = (F_0, F_1, F_2, \ldots)$ ein Algebrenhomomorphismus von $T^*(V)$ nach A und wegen der Linearität muss jeder Algebrenhomomorphismus diese Gestalt haben. □

Beispiel. Sei V ein K-Vektorraum, A eine K-Algebra und $f \in \operatorname{Hom}_K(V, A)$, d. h. eine K-lineare Abbildung von V nach A.

Seien $v_1, v_2, v_3, v_4 \in V$. Dann gilt:

$$F(2 + 5v_1 \otimes v_2) = 2 + 5f(v_1) \cdot f(v_2), \qquad F(v_2 - 3v_4 \otimes v_4) = f(v_3) - 3f(v_4)^2$$

Satz 11.7. *Sei V ein K-Vektorraum und $\{v_1, \ldots, v_n\}$ eine Basis von V. Dann ist die Menge*

$$\{v_{i_1} \otimes v_{i_2} \otimes \ldots \otimes v_{i_m} : m \geq 0,\ 1 \leq i_j \leq n \forall j\}$$

eine Basis von $T^*(V)$. Insbesondere gilt $\dim T^m(V) = n^m$ für alle $m \geq 0$.

Beweis. Folgerung 7.23 besagt, dass für K-Vektorräume V, W und Basen $\{v_1, \ldots, v_n\}$ von V und $\{w_1, \ldots, w_r\}$ von W

$$\{v_i \otimes w_j : 1 \leq i \leq n,\ 1 \leq j \leq r\}$$

eine Basis von $V \otimes W$ ist. Benutze Assoziativität des Tensorproduktes. □

Definition 11.8. Seien V und W K-Vektorräume und $f : \underbrace{V \times V \times \ldots \times V}_{n \text{ Faktoren},\ n \geq 2} \to W$ eine Abbildung. Man nennt f eine *symmetrische* (bzw. *alternierende*) *multilineare Abbildung*, falls gilt:

- $f(v_1, \ldots, v_n) = \varepsilon_\sigma f\left(v_{\sigma(a)}, \ldots, v_{\sigma(n)}\right)$ für jede Permutation $\sigma \in \operatorname{Perm}_n$. Dabei ist ε_σ das Vorzeichen der Permutation σ für alternierende multilineare Abbildungen. $\varepsilon_\sigma = 1$ für symmetrische multilineare Abbildungen.
- $f(f(v_1, \ldots, v_{i-1}, \lambda v_i + \lambda' v_i', v_{i+1}, \ldots, v_n)) = \lambda f(v_1, \ldots, v_n) + \lambda'(v_1, \ldots, vi - 1, v_i', v_{i+1}, \ldots, v_n)$ für alle $\lambda, \lambda' \in K$, $v_1, \ldots, v_n, v_i' \in V$, $1 \leq i \leq n$.

Ist $W = K$, so nennt man f auch *symmetrische* (bzw. *alternierende*) *Multilinearform* auf V.

Tensorprodukte sind universelle Vektorräume, die zur Beschreibung von Multilinearformen benutzt werden können. Analog gibt es universelle Vektorräume, die im Zusammenhang mit symmetrischen bzw. alternierenden Multilineaformen auftauchen. Dazu müssen wir weitere Strukturen auf K-Algebren benutzen.

Definition 11.9. Sei A eine K-Algebra. Ein *Ideal* I von A ist ein Untervektorraum von A, welcher der folgenden Bedingung genügt:

$$x \in I,\ a \in A \Rightarrow a \cdot x \in I,\ x \cdot a \in I$$

Beispiel. In der K-Algebra $K[X]$ (Polynomalgebra) ist die Menge der durch $X^2 + 1$ teilbaren Polynome ein Ideal. Aber zum Beispiel die Polynome vom Grad ≤ 5 bilden kein Ideal.

In $C[0,1]$ ist die Menge der stetigen Funktionen, die an der Stelle $x = \frac{1}{2}$ verschwinden, ein Ideal. Aber die polynomialen Funktion bilden kein Ideal.

Satz 11.10. *Sei A eine K-Algebra (mit Eins) und I ein Ideal von A. Dann induziert die Multiplikation auf A die Struktur einer K-Algebra (mit Eins) auf dem Faktorraum A/I (d. h. $\bar{a} = \bar{b} \Leftrightarrow a - b \in I$) durch die Regel*

$$\bar{a} \cdot \bar{b} = \overline{a \cdot b},$$

wobei $\bar{a}, \bar{b} \in A/I$ und a, b sind Repräsentanten von $\bar{a}$ bzw. $\bar{b}$.

Beweis. A und I sind per Definition K-Vektorräume, $I \subseteq A$, also ist A/I ein Vektorraum. Definiere eine Multiplikation $\cdot$ auf A/I wie im Satz. Man hat zu zeigen, dass diese Operation wohldefiniert ist. Da $(A, +, \cdot)$ ein Ring (mit Eins) ist und die Gleichung $(\lambda a) b = a (\lambda b) = \lambda (ab)$ gilt in A, für alle $\lambda \in K$, $a, b \in A$, erfüllt die obige Definition der Multiplikation auf A/I alle Bedingungen, die zu einer K-Algebrenstruktur (mit Eins) notwendig sind. (Falls A eine Eins 1 hat, ist $\bar{1}$ die Eins in A/I.)

Zur Wohldefiniertheit: Seien $a, b, a', b' \in A$ mit $a - a', b - b' \in I$. Dann gilt: $\bar{a} = \bar{a}'$, $\bar{b} = \bar{b}'$ und wir müssen $\overline{a \cdot b} = \overline{a' \cdot b'}$ zeigen. Es gilt:

$$\overline{ab} = \overline{(a' + (a - a'))(b' + (b - b'))} = \overline{a'b' + \underbrace{\underbrace{(a - a')\, b'}_{\in I} + \underbrace{a'\,(b - b')}_{\in I} + \underbrace{(a - a')\,(b - b')}_{\in I}}_{\in I}} = \overline{a'b'}$$

□

Definition 11.11. Sei A eine K-Algebra und B eine Teilmenge von A. Der kleinste Vektorraum, der alle Produkte $b, a \cdot b, b \cdot c, a \cdot b \cdot a$ mit $b \in B$, $a, c \in A$ enthält, heißt *das von B erzeugte Ideal von A*. Man beachte: Das von B erzeugte Ideal besteht aus endlichen Summen der Form $\sum_i a_i \cdot b_i \cdot c_i$, wobei $b_i \in B$, $a_i, c_i \in A \cup K$.

Beispiel. Für eine beliebige K-Algebra mit Eins 1 ist das $B = \{1\}$ erzeugte Ideal identisch mit A selbst, denn $a \cdot 1 = a$ für alle $a \in A$.

Für $A = C[-1,1]$ ist das von $f(x) = x$ erzeugte Ideal von A die Menge der stetigen Funktionen auf $[-1,1]$, die an der Stelle $x = 0$ verschwinden.

Für die Tensoralgebra $A = T^*(V)$ eines K-Vektorraums V ist das von $T^m(V)$, $m \geq 1$ erzeugte Ideal gerade:

$$\bigoplus_{n=m}^{\infty} T^n(V)$$

Definition 11.12. Sei V ein K-Vektorraum und $T^*(V)$ die Tensoralgebra von V. Sei I_s das von der Menge $\{v \otimes w - w \otimes v : v, w \in V\}$ und I_a das von der Menge $\{v \otimes v : v \in V\}$ erzeugte Ideal von $T^*(V)$. Die Quotienten $\mathrm{S}(V) := T^*(V)/I_s$ und $\Lambda(V) := T^*(V)/I_a$ heißen *symmetrische Algebra* bzw. *äußere Algebra von V*. Das Produkt in $\mathrm{S}(V)$ wird durch $\cdot$ und das der äußeren Algebra durch $\wedge$ (»Wedge«) bezeichnet.

$$I_s = \langle v \otimes w - w \otimes v : v, w \in V \rangle = K\{a(v \otimes w - w \otimes v)\, b : a, b \in T^*(V),\ v, w \in V\}$$

$$I_a = \langle v \otimes v : v \in V \rangle = K\{a(v \otimes v)\, b : a, b \in T^*(V),\ v \in V\}$$

Satz 11.13. *Die Algebra* $\mathrm{S}(V)$ *ist kommutativ.*

Beweis. Die Algebra $\mathrm{S}(V)$ wird von den Nebenklassen der Elemente von V erzeugt. Da jedes Element von $\mathrm{S}(V)$ als eine Linearkombination von Produkten aus den Erzeugern geschrieben werden kann, reicht es, zu zeigen, dass die Erzeuger kommutieren. Letztere folgt daraus, dass $v \cdot w - w \cdot v = 0$ gilt für alle $v, w \in (V + I_s)/I_s = V/(V \cap I_s)$ (wegen $v \otimes w - w \otimes v \in I_s$ für alle $v, w \in V$).

21.07.

Beispiel. Sei V ein K-Vektorraum mit $\dim V = 1$. Sei $\{v\}$ eine Basis von V. Dann gilt für alle $\lambda, \lambda' \in K$ die Gleichung

$$\lambda v \otimes \lambda' v - \lambda' v \otimes \lambda v \overset{7.19}{=} \lambda\lambda' v \otimes v - \lambda'\lambda v \otimes v \overset{7.19}{=} \underbrace{(\lambda\lambda' - \lambda'\lambda)}_{\substack{= 0, \text{ da } K \\ \text{kommutativ}}} v \otimes v = 0$$

Also gilt $I_s = \{0\}$ und $\mathrm{S}(V) = T^*(V)$. Wegen Satz 11.7 (gibt Basis von $T^*(V)$ an) folgt $\mathrm{S}(V) = T^*(V) \cong K[x]$.

Satz 11.14 (universelle Eigenschaft von $\mathrm{S}(V)$). *Sei V ein K-Vektorraum und A eine kommutative Algebra mit Eins. Sei $f : V \to A$ eine lineare Abbildung. Dann kann f eindeutig zu einem Homomorphismus $F : \mathrm{S}(V) \to A$ von K-Algebren fortgesetzt werden.*

Beweis. Nach Satz 11.6 kann f eindeutig zu einem Homomorphismus $F' : T^*(V) \to A$ von K-Algebren fortgesetzt werden. Wir wollen zeigen: $F'(I_s) = \{0\}$. Es gilt

$$F'(v \otimes w - w \otimes v) = F'(v) F'(w) - F'(w) F'(v) = 0 \qquad \text{für alle } v, w \in V,$$

da A kommutativ ist, und

$$F'(abc) = F'(a) F'(b) = F'(c) \qquad \text{für alle } a, b, c \in T^*(V).$$

Damit folgt $F'(I_s) = \{0\}$ und damit faktorisiert F' als $T^*(V) \xrightarrow{\pi} \mathrm{S}(V) = T^*(V)/I_s \xrightarrow{F} A$ mit einem eindeutig bestimmten K-Algebrenhomomorphismus F, so dass $F' = F \circ \pi$ gilt, wobei $\pi : T^*(V) \to T^*(V)/I_s$ die kanonische Projektion ist. □

Lemma 11.15. *Sei V ein endlich-dimensionaler K-Vektorraum. Es gilt:*

$$I_s = \bigoplus_{i=2}^{\infty} I_s \cap T^i(V) \qquad \textit{und} \qquad I_a = \bigoplus_{i=2}^{\infty} I_a \cap T^i(V)$$

Insbesondere ist $I_s \cap V = \{0\} = I_a \cap V$.

Beweis. Wir beweisen die Behauptung für I_s. Für I_a verfährt man ganz analog.

I_s und $T^i(V)$ sind K-Vektorräume, also ist $I_s \cap T^i(V)$ ein K-Vektorraum. Dieser ist ein Unterraum von $T^i(V)$, und die Summe der $T^i(V)$ ist direkt, also ist die Summe der $I_s \cap T^i(V)$ direkt. Darüberhinaus ist $I_s \cap T^i(V)$ eine Teilmenge von I_s und so gilt:

$$\bigoplus_{i=2}^{\infty} I_s \cap T^i(V) \subseteq I_s$$

Schließlich hat man für $E = \{v \otimes w - w \otimes v : v, w \in V\}$ die Relation:

$$I_s = \underbrace{T^*(V)\, E T^*(V)}_{= K\{abc : a, c \in T^*(V),\ b \in E\}} = \sum_{j,m=0}^{\infty} T^j(V)\, E T^m(V) = \underbrace{\sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{i-2} T^j(V)\, E T^{i-j-2}(V)}_{\subseteq T^i(V) \cap I_s} \subseteq \sum_{i=0}^{\infty} I_s \cap T^i(V)$$

□

Folgerung 11.16. *Sei $\mathrm{S}^m(V) = T^m(V)/(I_s \cap T^m(V))$ und $\Lambda^m(V) = T^m(V)/(I_a \cap T^m(V))$. Dann gilt:*

$$\mathrm{S}(V) = \bigoplus_{m=0}^{\infty} \mathrm{S}^m(V) \qquad \textit{und} \qquad \Lambda(V) = \bigoplus_{m=0}^{\infty} \Lambda^m(V)$$

Insbesondere gilt $V \cong \mathrm{S}^1(V)$, $V \cong \Lambda^1(V)$.

Satz 11.17 (universelle Eigenschaft von $\mathrm{S}^m(V)$ und $\Lambda^m(V)$). *Sei V ein K-Vektorraum und $m \geq 2$. Dann gibt es eine m-lineare Abbildung*

$$\theta_m : \underbrace{V \times \ldots \times V}_{m \text{ Faktoren}} \to \mathrm{S}^m(V) \qquad (\textit{bzw. } \theta_m : \underbrace{V \times \ldots \times V}_{m \text{ Faktoren}} \to \Lambda^m(V))$$

mit folgender Eigenschaft: Jede symmetrische (bzw. alternierende) m-lineare Abbildung $f : V \times \ldots \times V \to W$ in einen K-Vektorraum W faktorisiert eindeutig als

$$V \times \ldots \times V \xrightarrow{\theta_m} \mathrm{S}^m(V) \xrightarrow{f'} W \qquad (\textit{bzw. } V \times \ldots \times V \xrightarrow{\theta_m} \Lambda^m(V) \xrightarrow{f'} W)$$

mit einer linearen Abbildung f'. Der Vektorraum $\mathrm{S}^m(V)$ (bzw. $\Lambda^m(V)$) und die Abbildung θ_m sind eindeutig bestimmt bis auf eindeutigen Isomorphismus.

Beweis. Wir beweisen die Behauptung für $\mathrm{S}(V)$.

Da f multilinear ist, faktorisiert die Abbildung $f : V \times \ldots \times V \to W$ nach Theorem 7.18 als

$$V \times \ldots \times V \xrightarrow{\theta} T^m(V) \xrightarrow{f''} W$$

Da f symmetrisch ist, gilt:

$$f''(v_1 \otimes \ldots \otimes v_m) = f(v_1, \ldots, v_m) = f\left(v_{\sigma(1)}, \ldots, v_{\sigma(m)}\right) = f''\left(v_{\sigma(1)}, \ldots, v_{\sigma(m)}\right)$$

für alle $\sigma \in \mathrm{Perm}_m$ und alle $v_1, \ldots, v_m \in V$. Damit gilt

$$f''(I_s \cap T^m(V)) = \{0\}$$

und f'' faktorisiert weiter als

$$V \times \ldots \times \xrightarrow{\theta} T^m(V) \xrightarrow{\pi_m} \mathrm{S}^m(V) \xrightarrow{f'} W,$$

wobei $\pi_m : T^m(V) \to T^m(V) / (I_s \cap T^m(V)) = \mathrm{S}^m(V)$ die kanonische Projektion ist, und f' eindeutig bestimmt ist.

Setze $\theta_m = \pi_m \circ \theta$. Die Eindeutigkeit von $\mathrm{S}^m(V)$ folgt wie die Eindeutigkeit von $V \otimes W$ in Theorem 7.18.

Satz 11.18. *Sei V ein endlich-dimensionaler K-Vektorraum und $\{v_1, \ldots, v_n\}$ eine Basis von V. Dann ist die Menge*

$$\{v_1 v_{i_2} \cdots v_{i_m} : m \geq 0,\ i_1 \leq i_2 \leq \ldots \leq i_m\}$$

eine Basis von $\mathrm{S}(V)$. Insbesondere gilt:

$$\dim S^m(V) = \binom{n+m-1}{m}$$

Beweis. Nach Satz 11.13 ist $\mathrm{S}(V)$ kommutativ, also wird sie als Vektorraum von der Menge

(1) $\quad \{v_1{}^{m_1} \cdots v_n{}^{m_n} : m_i \geq 0 \text{ für alle } i\}$

erzeugt. Wir müssen noch zeigen, dass die Menge (1) linear unabhängig ist. Wegen Folgerung 11.16 reicht es, die lineare Unabhängigkeit für Produkte mit demselben $m = \sum_{i=1}^{n} m_i$ zu zeigen. Wir verfahren durch vollständige Induktion über $n = \dim V$.

Ist $n = 1$, dann ist $V = K\{v\}$ und $\mathrm{S}(V) = T^*(V)$. In diesem Fall foltg die Behauptung aus Satz 11.7.

Sei nun $m > 1$. Definiere $V' = K\{w_2, w_3, \ldots, w_n\}$ (lineare Hülle) und eine lineare Abbildung $f : V \to \mathrm{S}(V')$ durch $f(v_1) := 1$, $f(v_i) := w_i$ für $i \geq 2$. Nach den Sätzen 11.13 und 11.14 gibt es eine eindeutig bestimmte Fortesetzung von f zu einem Algebrenhomomorphismus $F : \mathrm{S}(V) \to \mathrm{S}(V')$. Dieser erfüllt dann

$$F(v_1{}^{m_1} v_2{}^{m_2} \cdots v_n{}^{m_n}) = \underbrace{w_2{}^{m_2} w_3{}^{m_3} \cdots w_n{}^{m_n}}_{\in \mathrm{S}^{n-m_1}(V')}.$$

Nach Induktionsvoraussetzung sind die Elemente $F(v_1{}^{m_1} \cdots v_n{}^{m_n})$ mit $\sum_{j=1}^{n} m_j = m$ linear unabhängig und wegen der Wohldefiniertheit von F ist die Menge (1) geschnitten mit $\mathrm{S}^m(V)$ linear unabhängig.

Der Beweis der kombinatorischen Dimensionsformel bleibt als Übungsaufgabe. $\square$

Lemma 11.19. *Sei V ein K-Vektorraum und $f \in V^* = \operatorname{Hom}_K(V,K)$ ein lineares Funktional auf V. Dann existiert eine lineare Abbildung $F : \Lambda(V) \to \Lambda(V)$ derart, dass gilt:*

$$F(1) = 0, \qquad F|_V = f, \qquad F(v \wedge w) = f(v)\,w - v \wedge F(w) \qquad \textit{für alle } v \in V,\ w \in \Lambda(V)$$

Diese Abbildung heißt Kontraktion durch f.

Beweis. Wir müssen noch die Existenz von F zeigen. Aus der Linearität von f folgt, dass wir induktiv eine lineare Abbildung $F' : T^m(V) \to T^{m-1}(V)$ für jedes $m \geq 1$ derart definieren können, dass gilt:

$$F'(v \otimes w) = f(v)\,w - v \otimes F(w) \qquad \text{für alle } v \in V,\ w \in T^{m-1}(V)$$

Für $w = v \otimes w'$ erhält man:

$$F'(v \otimes (v \otimes w')) = f(v)\,v \otimes w' - v \otimes F'(v \otimes w') = f(v)\,v \otimes w' - v \otimes (f(v)\,w' - v \otimes F(w')) = v \otimes v \otimes F'(w')$$

Damit gilt $F'(I_a) \subseteq I_a$ und somit induziert F' eine Abbildung $F : \Lambda(V) \to \Lambda(V)$ wie im Lemma.

Satz 11.20. *Sei V ein endlich-dimensionaler K-Vektorraum und $\{v_1, \ldots, v_n\}$ eine Basis von V. Dann ist die Menge*

$$\{v_{i_1} \wedge \ldots \wedge v_{i_m} : 1 \leq i_1 \leq i_2 \leq \ldots \leq i_m \leq n,\ m \geq 0\}$$

eine Basis von $\Lambda(V)$. Insbesondere gilt $\dim \Lambda^m(V) = \binom{n}{m}$.

Beweis. Man hat $v_i \otimes v_i$, $\underbrace{(v_i + v_j) \otimes (v_i + v_j)}_{= \underbrace{v_i \otimes v_i + v_j \otimes v_j}_{\in I_a} + v_i \otimes v_j + v_j \otimes v_i} \in I_a$ für alle i,j. Insbesondere hat man

$$(2) \qquad \begin{cases} v_i \wedge v_i = 0 & \text{für alle } i \\ v_j \wedge v_i = -v_i \wedge v_j & \text{für alle } i,j \text{ mit } j > i \end{cases}$$

und damit wird $\Lambda(V)$ von der Menge $\{v_{i_1} \wedge v_{i_2} \cdots \wedge v_{i_m} : m \geq 0,\ i_1 < i - 2 < \ldots < i_m\}$ (3) aufgespannt. Um die lineare unabhängigkeit von (3) zu zeigen, benutzen wir die Lemmata 11.15 und 11.19. Angenommen, wir haben eine nichttriviale Linearkombination

$$\Lambda(V) = \bigoplus_{m=0}^{\infty} \Lambda^m(V)$$

von Elementen aus (3)$\cap\Lambda^m(V)$, die in $\Lambda^m(V)$ Null ist. Dann gibt es auch eine nichttriviale Linearkombination

$$v := \sum_{i_1, \ldots, i_m} \lambda_{i_1, \ldots, i_m} \wedge v_{i_1} \wedge \ldots \wedge v_{i_m},$$

in der der größte auftretende Index i_m minimal ist, sagen wir d. Das bedeutet, dass alle nichttrivialen Linearkombinationen in (3)$\cap\Lambda^m(V)$, die nur Faktoren v_i mit $i < d$ enthalten, linear unabhängig sind. Schreibe $v = m \wedge v_d + w'$ (siehe 7.19), wobei $w \in \Lambda^{m-1}(V)$, $w' \in \Lambda^m(V)$ keinen Faktor v_i mit $i \geq d$ enthalten. Es gilt $v = 0$, aber $w \neq 0$ nach Konstruktion. Sei $f : V \to K$ die lineare Abbildung mit$f(v_i) = 0$ für $i \neq d$ und $f(v_d) = 1$. Dann gilt für das zugehörige F aus Lemma 11.19 die Formel

$$0 = F(0) = F(v) = F(w \wedge v_d + w') = (-1)^{m-1} \underbrace{w}_{\neq 0} \underbrace{f(v_d)}_{=1} \neq 0$$

Das ist ein Widerspruch. □

11.1 Anwendungen von $\Lambda(V)$

11.1.1 Determinanten von Matrizen

V K-Vektorraum, $\{v_1, \ldots, v_n\}$ Basis, $A = (a_{ij})_{i,j=1,\ldots,n} \in M_n(K)$, $w_i := \sum_{j=1}^{n} a_{ji} v_i$. Dann gilt:

$$w_1 \wedge w_2 \wedge \ldots \wedge w_n = (\det A)\, v_1 \wedge v_2 \wedge \ldots \wedge v_n \qquad \text{in } \Lambda^m(V)$$

11.1.2 Vektorprodukt auf $K^3 = K \oplus K \oplus K$

Sei $V = K^3$ mit der Standardbasis $\{v_1, v_2, v_3\}$. $\Lambda^2(V)$ ist 3-dimensional mit der Basis

$$B_2 = \{v_2 \wedge v_3, v_3 \wedge v_1, v_2 \wedge v_2\}.$$

Dann hat man

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ a_1 b_2 - b_2 a_1 \end{pmatrix}$$

bezüglich der Basis B_2 von $\Lambda^2(V)$.

Stichwortverzeichnis