Arithmetik und Spiegelsymmetrie

Freiburg SS 2008

In den Arbeiten [CORI] und [CORII] fanden Candelas et. al. (durch explizite Rechnung) in einem Beispiel arithmetische Phänomene bei den an Spiegelsymmetrie beteiligten Familien von Calabi-Yau-Mannigfaltigkeiten. Es geht jeweils um die rationalen Punkte einer CY über einem endlichen Körper. Deren Anzahl wird einerseits mit der Periodenabbildung in Verbindung gebracht, andererseits mit der entsprechenden Zahl für die Spiegelvarietät verglichen. In [HKS] §6 wird (leider sehr skizzenhaft) eine konzeptionellere Erklärung für dieses Phänomen gegeben. Ausführlicher ist [Klo]. Dies wollen wir soweit wie möglich verstehen.

Im ersten Teil des Seminars wollen wir die Ergebnisse von Candelas et. al. vorstellen und gleichzeitig eine gemeinsame Sprache für alle Seminarteilnehmer finden. Im zweiten Teil soll es darum gehen, den technischen Rahmen für [HKS] §6 und [Klo] einzuführen und dann deren Argument nachzuvollziehen.

Die Doktorarbeit [Kad] enthält neben konkreten Rechnungen auch Literaturzusammenfassungen, die beim Lesen hilfreich sein können.

Vorkenntnisse

Algebraische Geometrie, am besten Schemata. Wir werden mit p-adischer Analysis arbeiten. Die Grundbegriffe (z.B. [CORI] 2.2, [Ko] Ch. I, III, [Ro]) sollten bekannt sein.

Vorträge

1. Einführung in Spiegelsymmetrie, insbesondere Griffith-Dwork Methode. Der Überblick sollte auf die Bedürfnisse von [CORI], [CORII] abgestimmt sein.

2. Vorstellung der Ergebnisse von [CORI] und einige exemplarische Rechnungen.

3. Zeta-Funktionen für Varietäten über endlichen KÖrpern und die Weilvermutungen. Axiomatischer Beweis mittels Weil-Kohomologie wie in [Ha] Appendix C oder in der Einführung von [De]. Der nicht-eigentliche Fall sollte ebenfalls besprochen werden. Falls Zeit ist: Herleitung der Hasse-Schranke für elliptische Kurven.

4. Definition von Grothendieck-Motiven [Sch] Section 1, Zusammenhang zur Hodge-Vermutung, [Kle] (in Ausschnitten, vor allem Section 5) Grothen-

diecks Beweisidee für die Riemannsche Vermutung via Motiven, [Kle] Theorem 5.-6. Diese Dinge werden im weiteren nicht benötigt, sollen aber erklären, weshalb man überhalt mit arithmetischen Aspekten von Hodgetheoretischen Konstruktionen rechnen sollte.

5. Vorstellung von diversen Weil-Kohomologien: in Charakteristik 0 singuläre Kohomologie, de Rham-Kohomologie, Hodge-Strukturen, in beliebiger Charakteristik l-adische Kohomologie (wichtig), crystalline Kohomologie, rigide Geometrie (wichtig). Dabei auch Diskussion des nicht-vollständigen Falls, Kohomologie mit kompaktem Träger, Teile der Bloch-Ogus-Axiome vorstellen.

6. Vorstellung der Ergebnisse von [CORII] und einige exemplarische Rechnungen.

7. Definition von Monsky-Washnitzer-Kohomologie nach [vdP]§2, besonderer Schwerpunkt sollte sorgfältige Erklärung von (2.1), (2.2) sein. Dieser Vortrag sollte auch die Grundlagen aus der p-adischen Analysis für die Nichtspezialisten vorstellen.

8. Frobeniusoperation und Lefschetztheorem, [vdP] §3, §4.

9. Dworks Einheitentheorem, [vdP]§7 Dworks Einheitentheorem.

10. Die Differentialgleichung der Zeta-Funktion Teil I, [Klo], s. a. [Ka], [vdP] §5.

11. Teil II

12. Teil III

Literatur

[CORI] P. Candelas, X. de la Ossa and F. Rodriguez-Villegas: Calabi-Yau manifolds over finite fields I, arXiv:hep-th/0012233

[CORII] P. Candelas, X. de la Ossa and F. Rodriguez-Villegas: Calabi-Yau manifolds over finite fields II, In Calabi-Yau varieties and mirror symmetry (Toronto, ON, 2001), 121ž013157, Fields Inst. Commun., 38, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2003. arXiv:hep-th/0402133

[De] P. Deligne, La conjecture de Weil I, Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math. No. 43 (1974), 273–307.

[Ha] R. Hartshoren, Algebraic Geometry, Springer Verlag.

[HKS] K. Hulek, R. Kloosterman, M. Schütt: Modularity of Calabi-Yau varieties, in: Global aspects of complex geometry (F. Catanese et al. eds.), 271ž013309, Springer, Berlin, 2006. arXiv:math/0601238

[Kad] S. Kadir, The Arithmetic of Calabi-Yau manifolds and mirror symmetry, PhD thesis, Oxford 2004. arXiv:hep-th/0409202

[Ka] N. Katz, On the differential equations satisfied by period matrices, Publ. IHES 35 (68), 71–106.

[Kle] S. Kleiman, The standard conjectures, in: Motives (Seattle, WA, 1991), 3–20, Proc. Sympos. Pure Math., 55, Part 1, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1994.

[Klo] R. Kolsterman, The zeta-function of monomial deformations of Fermat hypersurfaces, Preprint 2007, arXiv:math/0703120

[Ko] N. Koblitz, p-adic Numbers, p-adic Analysis and Zeta-Functions, GTM 58, Springer Verlag.

[Mot] Motives Proceedings

[vdP] M. van der Put, The cohomology of Monsky and Washnitzer, Mém. de la Soc. Math. de France 2me série, 23 (86), 33–59.

[Ro] A.Robert, A course in p-adic analysis, Graduate Texts in Mathematics, 198. Springer-Verlag.

[Sch] A. Scholl, Classical Motives, in: Motives (Seattle, WA, 1991), 163–187, Proc. Sympos. Pure Math., 55, Part 1, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1994.

Ansprechpartner: Annette Huber, annette.huber@math.uni-freiburg.de
Bernd Siebert, bernd.siebert@math.uni-freiburg.de