Übungen zur Vorlesung "Algebraische Zahlentheorie" SS 2008 Blatt 1

Ausgabe: 25.04.2008, **Abgabe:** 02.05.2008

Informationen zur Vorlesung finden Sie unter:
http://home.mathematik.uni-freiburg.de/arithmetische-geometrie/lehre/azt.html
Alle Lösungen sind vollständig zu begründen.

Aufgabe 1.1: (a) Sei n eine beliebige natürliche Zahl und $k = 17$. Bestimmen Sie die letzten zwei Ziffern des Produkts der Zahlen n bis $n + k$ *in der Darstellung zur Basis* 7.
(b) Wie groß muß k gewählt werden, damit für ein beliebiges n das Produkt der Zahlen von n bis $n + k$ durch 60 teilbar ist?

(6 Punkte)

Aufgabe 1.2: Geben Sie eine Darstellung des $\mathbb{Q}$-Vektorraumes $\mathbb{Q}(\sqrt{1+i})$ an. Wie sieht in dieser Basis die darstellende Matrix für die Multiplikation mit $\sqrt{1+i}$ aus?

(4 Punkte)

Aufgabe 1.3: Sei d eine quadratfreie ganze Zahl. Zeigen Sie:

(a) $\mathcal{O}_{\mathbb{Q}(\sqrt{d})}$ ist ein $\mathbb{Z}$-Modul.

(b) Geben Sie ein linear unabhängiges Erzeugendensystem an.

(4 Punkte)

Aufgabe 1.4: Zeigen Sie: Für $\rho = e^{2\pi i/3}$ eine primitive dritte Einheitswurzel ist $\mathbb{Z}[\rho]$ ein Hauptidealring. Betrachten Sie dazu die Abbildung $N : \mathbb{Q}(\rho) \setminus \{0\} \to \mathbb{Q}$ mit $N(x) = x\overline{x}$ und gehen Sie wie folgt vor:

(a) Für alle $a, b \in \mathbb{Z}[\rho] \setminus \{0\}$ ist $N(ab) \geq N(a)$.

(b) Für alle $a, b \in \mathbb{Z}[\rho]$ mit $a \neq 0$ existieren $q, r \in \mathbb{Z}[\rho]$, so dass $b = aq + r$ und $N(r) < N(a)$ gelten. (Division mit Rest)

(c) Folgern Sie daraus die Behauptung.

(6 Punkte)