Proseminar p-adische Zahlen

Prof. Dr. Huber-Klawitter

SS 08

Allgemeine Hinweise

- bitte rechtzeitig (mind. 1 Woche vor dem Vortrag) zum Tutorium erscheinen. Anmeldung per Telefon (2035557) oder email (jakob.scholbach@math.uni-freiburg.de) oder zur Sprechzeit (Mi. 9-10) kommen (Raum 420)
- zum Tutorium solltet Ihr den Vortrag bereits im Wesentlichen ausgearbeitet haben, damit die Zeit effektiv genutzt werden kann
- Zum Einschätzen der Vortragsdauer empfiehlt es sich, diesen mal zur Probe vorher zu halten. Fragen und Verstnändnisprobleme verlangsamen den Ablauf oft deutlich, d.h. Ihr solltet ugf. 1 Stunde 15 Minuten anpeilen.
- Ihr könnt selbst Rundmails an die Seminarteilnehmer verschicken (proseminar-hk08@math.uni-freiburg.de), z.B. Handouts. Bitte aber nicht vor dem eigenen Vortrag das komplette Manuskript verschicken, da sonst die Aufmerksamkeit im Keller ist.
- bei Vorträgen fuer 2 Studenten bitte den Inhalt des Vortrags gleich verteilen.
- **wichtig:** bitte stets zu dem Termin (Mi od. Do) kommen, an dem Ihr auch selbst vortragt

Vortragsplanung

1. Vortrag: Nicht-archimedische Metriken ([3, §§1 und 2]).

- Definition von Normen und nicht-archimedischen Normen
- Definition der p-adischen Bewertung und der zugehörigen Norm $|-|_p$ (mit Beweis der Normeigenschaft, diskutiere kurz $|-|_n$ für n nicht prim)
- Bemerke, daß es im Gegensatz zu $|-|$ eine nicht-archimedische Metrik ist. Beispiele (etwa [2, Problem 133])
- Charakterisierung nicht-archimedischer Metriken (mit Beweis) [2, Th. 2.2.2]

2. Vortrag: Satz von Ostrowski.

- Äquivalenz von Normen, Satz von Ostrowski [3, I.2 Th. 1].
- Produktformel mit Beweis [3, Übungsaufgabe I.2.18]
- falls Zeit bleibt [3, Übungsaufgaben I.2.19, I.2.20]

3. Vortrag: Vervollständigungen [3, I.4] oder [2, §3.2.].

- falls nötig: wiederhole Cauchyfolge, Vollständigkeit, Dichtheit (siehe jedes Analysisbuch, z.B. [1])
- Beispiel: $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$: $\mathbb{Q}$ nicht vollständig, $\mathbb{R}$ vollständig, $\mathbb{Q}$ dicht in $\mathbb{R}$.
- Addition und Multiplikation von Cauchyfolgen in $\mathbb{Q}$ bzgl. der p-adischen Norm. Nullfolgen.
- Definiere $\mathbb{Q}_p$ und zeige, daß es sich um einen vollständigen diskret bewerteten Körper handelt
- falls Zeit bleibt: zeige daß $\mathbb{Q}$ nicht vollständig unter $|-|_p$

4. Vortrag: Struktur von $\mathbb{Q}_p$ [2, §2.3].

- $\mathbb{Q}_p$ als topologischer Raum
- Erwähne Stetigkeit der Körperoperationen [2, Problem 44] (beweise höchstens eine Aussage)
- Definiere $\mathbb{Z}_p$, zeige daß es sich um einen Ring handelt
- Diskutiere und beweise "Jeder Punkt eines Kreises ist ein Mittelpunkt", "Jedes Dreieck in $\mathbb{Q}_p$ ist gleichschenklig".

5. Vortrag: Algebraische Definition von $\mathbb{Z}_p$ [6, II.1].

- falls nötig: wiederhole Ringe $\mathbb{Z}/s\mathbb{Z}$ sowie Restklassenabbildungen
- Definiere $\mathbb{Z}_p$ mittels projektivem Limes, mache es in Termen modularer Arithmetik explizit
- Zeige, daß die beiden Definitionen von $\mathbb{Z}_p$ übereinstimmen [3, Theorem I.4.2], d.h. daß ein Isomorphismus von Ringen besteht
- Beschreibe Restklassenabbildung $\mathbb{Z}_p \to \mathbb{Z}/p$ und zeige $\mathbb{Z}_p/p \cdot \mathbb{Z}_p \xrightarrow{\cong} \mathbb{Z}/p$, definiere $\mathbb{Q}_p$.
- Beschreibe $\mathbb{Z}_p \backslash \{0\}$ in Termen der Einheitengruppe und konstruiere anhanddessen die p-adische Bewertung [6, II.1.2. Prop. 2]

6. Vortrag: Topologischer Exkurs (siehe jedes beliebige Topologiebuch, z.B. [7]).

- Definiere topologische Räume (Beispiel: metrische Räume, diskrete Topologie auf endlichen Mengen), Produkttopologie, projektiver Limes und dessen Topologie

- Definiere (lokale) Kompaktheit, Umgebungsbasis, Homöomorphiekriterium einer Bijektion zwischen zwei Räumen via Umgebungsbasen

7. Vortrag: Äquivalenz der topologischen und algebraischen Definition von $\mathbb{Q}_p$ und $\mathbb{Z}_p$.

- Zeige, daß die oben behandelte Äquivalenz der Definitionen von $\mathbb{Z}_p$ die jeweiligen Topologien (Limes-Topologie und durch die p-adische Bewertung induzierte Topologie) berücksichtigt, d.h. daß es sich um einen Homöomorphismus handelt [6, Proposition 3, I.1.2] oder [5, Satz II.4.5]

- Zeige anhand der Limes-Definition, daß $\mathbb{Z}_p$ kompakt, Hausdorffsch und total unzusammenhängend sowie $\mathbb{Q}_p$ lokal kompakt [2, 3.3.7 u. 3.3.8], gib die in $\mathbb{Z}_p$ offenen Mengen explizit an

8. Vortrag: Hensels Lemma [6, II.2]

- Nullstellen von Polynomen über $\mathbb{Z}/p^n$ und $\mathbb{Z}_p$

- Hensels Lemma (Theorem 1 bei Serre) sowie der Rest von [6, II.2]. Betone beim Beweis die Ähnlichkeit zur klassischen Newtonapproximation von Nullstellen reeller Funktionen.

- Beispiele: $(p-1)$-te Einheitswurzeln (verwende den kleinen Satz von Fermat und [5, Beispiel S. 136])

9. Vortrag: Etwas p-adische Analysis I [2, §4.1-4.3].

- Besonderheit von Cauchy-Sequenzen im nicht-archimedischen Fall [2, 4.1.1]

- Konvergenzkriterium für Reihen (im Gegensatz z.B. zur harmonischen Reihe in $\mathbb{R}$), Konvergenzradius von Potenzreihen [2, 4.1.2, 4.2.1.]

- Zwischenwertsatz schlägt fehl [2, S. 167f] (anstelle von $\mathbf{C}_p$ in loc. cit. soll $\mathbb{Q}_p$ genommen werden)

10. Vortrag: Etwas p-adische Analysis II.

- Definiere Logarithmus und Exponentialfunktion, berechne die Konvergenzgebiete [2, §4.1-4.3]

- Stetigkeit von Logarithmus und Exponentialfunktion und gegenseites Inverses

- Beschreibe $\mathbb{Q}_p^\times$ unter Verwendung des Logarithmus [5, Satz II.5.3 und 5.5.] (nur im Spezialfall $K = \mathbb{Q}_p$, dann wird dort $q = p$, $\pi = p$, $\mathcal{O} = \mathbb{Z}_p$, $\mathfrak{p} = p\mathbb{Z}_p$, $e = 1$)

11. Vortrag: Newton-Polygone

- Definiere so knapp wie möglich: endliche Körpererweiterung $L|K$ und Grad der Erweiterung, Zerfällungskörper, siehe etwa [4]
- Definiere die Norm $N_{L|K}$ und die Fortsetzung einer Bewertung auf K (K ist hier stets $\mathbb{Q}_p$)
- Definiere das Newton-Polygon eines Polynoms
- Beweise das Kriterium für Nullstellen p-adischer Polynome via Newton-Polygon [5, Satz II.6.3]

Literatur

[1] H. Amann and J. Escher. *Analysis. I.* Grundstudium Mathematik. [Basic Study of Mathematics]. Birkhäuser Verlag, Basel, 1998.

[2] F. Q. Gouvêa. *p-adic numbers.* Universitext. Springer-Verlag, Berlin, 1993. An introduction.

[3] N. Koblitz. *p-adic numbers, p-adic analysis, and zeta-functions*, volume 58 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York, second edition, 1984.

[4] F. Lorenz. *Einführung in die Algebra. Teil I.* Bibliographisches Institut, Mannheim, 1987.

[5] J. Neukirch. Algebraische Zahlentheorie. Springer.

[6] J.-P. Serre. *A course in arithmetic.* Springer-Verlag, New York, 1973. Translated from the French, Graduate Texts in Mathematics, No. 7.

[7] T. tom Dieck. *Topologie.* de Gruyter Lehrbuch. [de Gruyter Textbook]. Walter de Gruyter & Co., Berlin, 1991.

Kontakt: Prof. Dr. Huber (annette.huber@math.uni-freiburg.de), Jakob Scholbach (scholbach@uchicago.edu, Raum 420, Tel. 2035557)