Lösungshinweise Blatt 12

1

Betrachte die bilineare Abb.

$$b : \mathbb{R} \times \mathbb{Q}[X] \to \mathbb{R}[X] : (\lambda, q) \to \lambda \cdot q$$

Wegen 7.2.3 ex. genau ein $\hat{b}$ mit:

$$\hat{b} : \mathbb{R} \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{Q}[X] \to \mathbb{R}[X] \;\; \mathbb{Q}\text{-linear und } b(\lambda, q) = \hat{b}(\lambda \otimes q)$$

Man kann $\mathbb{R} \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{Q}[X]$ auch als $\mathbb{R}$-VR auffassen: für $\lambda \otimes q \in \mathbb{R} \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{Q}[X]$ und $\mu \in \mathbb{R}$ gelte $\mu \cdot (\lambda \otimes q) := (\mu \cdot \lambda) \otimes q$

Man kann sich davon überzeugen, daß mit dieser $\mathbb{R}$-Vektorraumstruktur auf $\mathbb{R} \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{Q}[X]$ die Abbildung $\hat{b}$ auch $\mathbb{R}$-linear ist.

Damit ist $\{1 \otimes 1, 1 \otimes x^1, 1 \otimes x^2 \ldots\}$ eine $\mathbb{R}$-Basis von $\mathbb{R} \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{Q}[X]$ und das Bild dieser ist eine Basis von $\mathbb{R}[X]$.

2

2.1

Es gilt:

$$can\left(\sum_{i=1}^{n} v_i^* \otimes v_i\right) : v \mapsto \sum_{i=1}^{n} v_i^*(v) \cdot v_i = id_V$$

denn wegen $v_i^*(v_j) = \delta_{ij}$ folgt

$$\sum_{i=1}^{n} v_i^*(v) \cdot v_i = \sum_{i=1}^{n} v_i^*\left(\sum_{j=1}^{n} \alpha_j v_j\right) \cdot v_i = \sum_{i,j} \alpha_j \cdot v_i^*(v_j) \cdot v_i = v$$

2.2

Es gilt:

$$can\,(v_i^* \otimes v_j) : v \mapsto v_i^*(v) \cdot v_i = \alpha_i \cdot v_j$$

denn

$$v_i^*(v) = v_i^*\left(\sum_{k=1}^{n} \alpha_k v_k\right) = \alpha_i$$

daraus folgt dann für $v := \sum_{i,j} \alpha_{ij} v_i^* \otimes v_j$

$$tr\,(can\,(v)) = \sum_{i}^{n} \alpha_{ii}$$

die Abb. ev liefert ebenso:

$$ev(v) = \sum_{i,j} \alpha_{ij} v_i^* (v_j) = \sum_i^n \alpha_{ii}$$

und damit folgt $ev = tr \circ can$

3

Wegen 7.2.8 bilden $v_i \otimes v_j$ eine Basis von $V \otimes_k V$. Die UVR

$$U_{ij} := \langle v_i \otimes v_j, v_j \otimes v_i \rangle$$

sind offenbar τ-invariant, und es gilt:

$$Eig(1,\tau) \cap U_{ij} = \langle v_i \otimes v_j + v_j \otimes v_i \rangle \, bzw. \langle v_i \otimes v_i \rangle$$

$$Eig(-1,\tau) \cap U_{ij} = \langle v_i \otimes v_j - v_j \otimes v_i \rangle$$

Und damit

$$Eig(1,\tau) = \bigoplus_{i \leq j} Eig(1,\tau) \cap U_{ij}$$

$$Eig(-1,\tau) = \bigoplus_{i < j} Eig(1,\tau) \cap U_{ij}$$

da sich $V \otimes_k V$ von den U_{ij} überdecken lässt.

4

Es gilt: $V^* \otimes_k V^* \cong_{7.3.1} Hom(V, V^*) =_{Def.} Hom(V, Hom(V,k))$
$\cong_{7.2.8} Hom(V \otimes V, k) \cong_{7.2.3bzw.7.2.4} Bil_k(V)$