Übungen zur Vorlesung "Lineare Algebra II"
SS 2009 Blatt 1

Ausgabe: 23.04.2009, **Abgabe:** 30.04.2009

Informationen zur Vorlesung finden Sie unter:

http://home.mathematik.uni-freiburg.de/arithmetische-geometrie/lehre/ss09/la2.html

Alle Lösungen sind vollständig zu begründen.

Aufgabe 1.1: Wir betrachten den $\mathbb{R}$-Vektorraum $M_2(\mathbb{R})$ der (2×2)-Matrizen mit reellen Koeffizienten.

(i) Zeigen Sie, dass
$$\langle A, B\rangle := \operatorname{tr}(A \cdot B^\top)$$
ein Skalarprodukt auf $M_2(\mathbb{R})$ definiert, wobei $B^\top$ die zu B transponierte Matrix bezeichnet.

(ii) Bestimmen Sie den Untervektorraum derjenigen Matrizen, die orthogonal zur folgenden Matrix sind:
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(4 Punkte)

Aufgabe 1.2: Wir betrachten den $\mathbb{C}$-Vektorraum $\mathbb{C}^3$ mit dem Standard-Skalarprodukt. Berechnen Sie die orthogonale Projektion des Vektors
$$\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 3i \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^3$$
auf den Untervektorraum
$$\left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^3 \mid x + y + z = 0 \right\}.$$

(4 Punkte)

(bitte wenden)

Aufgabe 1.3: Sei V ein euklidischer Vektorraum. Zeigen Sie, dass die Dreiecksungleichung

$$\|v + w\| \leq \|v\| + \|w\|$$

genau dann eine Gleichung ist, wenn $v \in \mathbb{R}_{\geq 0} w$ oder $w \in \mathbb{R}_{\geq 0} v$ gilt.

(6 Punkte)

Aufgabe 1.4: Sei V der $\mathbb{R}$-Vektorraum aller reellen Folgen $a = (a_0, a_1, \dots)$ mit

$$\sum_{i=0}^{\infty} a_i^2 < \infty.$$

(i) Zeigen Sie, dass durch

$$\langle a, b \rangle := \sum_{i=0}^{\infty} a_i b_i$$

ein Skalarprodukt auf V gegeben ist.

(ii) Sei $U \subseteq V$ der Untervektorraum derjenigen Folgen $a = (a_0, a_1, \dots)$, für die nur endlich viele a_i verschieden von Null sind. Zeigen Sie, dass die Aussage $U = (U^{\perp})^{\perp}$ nicht gilt.

(6 Punkte)

Anwesenheitsaufgaben für die zweite Woche

Aufgabe 1.5: Sei V die Menge aller reellen Folgen $a = (a_0, a_1, \dots)$ mit

$$\sum_{i=0}^{\infty} a_i^2 < \infty.$$

Zeigen Sie, dass V ein $\mathbb{R}$-Vektorraum ist.

Aufgabe 1.6: Sei k ein Körper, V ein k-Vektorraum. Wir bezeichnen mit $V^* := \mathrm{Hom}(V, k)$ den Dualraum. Zeigen Sie, dass die Auswertungsabbildung

$$\mathrm{ev} : V \times V^* \to k : (v, f) \mapsto f(v)$$

eine bilineare Abbildung ist.

Aufgabe 1.7: Zeigen Sie, dass durch die folgende Zuordnung ein Skalarprodukt auf dem $\mathbb{R}$-Vektorraum $\mathbb{R}^3$ definiert wird:

$$\langle -, - \rangle : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R} : (x, y) \mapsto x^\top \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1 \end{pmatrix} y.$$

Aufgabe 1.8: Sei $k = \mathbb{R}$ oder $k = \mathbb{C}$, und V ein k-Vektorraum.

(i) Sei $\langle -, - \rangle$ ein Skalarprodukt auf V mit zugehöriger Norm $\|v\| = \sqrt{\langle v, v \rangle}$. Beweisen Sie, dass für alle $v, w \in V$ die folgende Gleichung gilt:
$$\|v + w\|^2 + \|v - w\|^2 = 2(\|v\|^2 + \|w\|^2).$$

(ii) Geben Sie eine geometrische Interpretation dieser Gleichung für den Fall $V = \mathbb{R}^2$ mit dem Standard-Skalarprodukt an.