Übungen zur Vorlesung "Lineare Algebra II" SS 2009 Blatt 12

Ausgabe: 16.07.09, **Abgabe:** 23.07.09

Informationen zur Vorlesung finden Sie unter:

http://home.mathematik.uni-freiburg.de/arithmetische-geometrie/lehre/ss09/la2.html

Alle Lösungen sind vollständig zu begründen.
Es werden nur *zwei* Aufgaben abgegeben und bewertet.

Aufgabe 12.1: Zeigen Sie: Die Multiplikation induziert einen Isomorphismus von reellen Vektorräumen:

$$\mathbb{R} \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{Q}[X] \xrightarrow{\cong} \mathbb{R}[X].$$

(6 Punkte)

Aufgabe 12.2: Sei k ein Körper, und V ein endlich-dimensionaler Vektorraum. Bezeichne $\mathrm{can} : V^* \otimes_k V \to \mathrm{End}(V)$ die in Lemma 7.3.1 definiert Abbildung. Zeigen Sie:

(i)
$$\mathrm{can}\left(\sum_{i=1}^{n} v_i^* \otimes v_i\right) = \mathrm{id}_V\,.$$

(ii) Das folgende Diagramm kommutiert:

$$\begin{tikzcd} V^* \otimes_k V \arrow[r, "\mathrm{ev}"] \arrow[d, "\mathrm{can}"'] & k \arrow[d, "="] \\ \mathrm{End}(V) \arrow[r, "\mathrm{tr}"'] & k \end{tikzcd}$$

Dabei bezeichnet $v_1, \ldots, v_n \in V$ eine beliebige Basis, und $v_1^*, \ldots, v_n^* \in V^*$ die dazu duale Basis. Die Abbildung $\mathrm{ev} : V^* \otimes V \to k$ ist definiert durch $\mathrm{ev}(f, v) = f(v)$.

(6 Punkte)

(bitte wenden)

Aufgabe 12.3: Sei k ein Körper, V ein endlich-dimensionaler Vektorraum. Wir betrachten die Abbildung

$$\tau : V \otimes_k V \to V \otimes_k V : \sum \lambda_{ij} v_i \otimes v_j \mapsto \sum \lambda_{ij} v_j \otimes v_i,$$

wobei $v_1, \dots, v_n \in V$ eine beliebige Basis ist. Geben Sie Basen der Eigenräume zu den Eigenwerten ± 1 an.

(6 Punkte)

Aufgabe 12.4: Sei k ein Körper, und V ein endlich-dimensionaler Vektorraum. Zeigen Sie, daß es einen Isomorphismus

$$V^* \otimes_k V^* \to \mathrm{Bil}_k(V)$$

gibt.

(4 Punkte)