Übungen zur Vorlesung "Lineare Algebra II"
SS 2009   Blatt 2

Ausgabe: 30.04.2009, **Abgabe:** 07.05.2009

Informationen zur Vorlesung finden Sie unter:

http://home.mathematik.uni-freiburg.de/arithmetische-geometrie/lehre/ss09/la2.html

Alle Lösungen sind vollständig zu begründen.
Es werden nur *zwei* Aufgaben abgegeben und bewertet.

Aufgabe 2.1: Bestimmen Sie die Drehachse der orthogonalen Transformation $D : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, die durch die folgende Matrix gegeben ist:

$$\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 & -\sqrt{2} \\ -1 & 1 & -\sqrt{2} \\ \sqrt{2} & \sqrt{2} & 0 \end{pmatrix}.$$

(4 Punkte)

Aufgabe 2.2: Wir betrachten den $\mathbb{R}$-Vektorraum $\mathbb{R}^3$ mit dem Standard-Skalarprodukt. Sei $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ eine orthogonale Abbildung mit Determinante (-1). Zeigen Sie, dass sich f als Verknüpfung einer Drehung um eine Achse mit einer Spiegelung an der zu dieser Achse senkrechten Hyperebene schreiben läßt.

(4 Punkte)

Aufgabe 2.3: Sei V ein endlich-dimensionaler $\mathbb{C}$-Vektorraum mit einem Skalarprodukt. Zeigen Sie, dass ein Endomorphismus $f : V \to V$ genau dann unitär ist, wenn es in V eine Orthonormalbasis aus Eigenvektoren von f gibt und für alle Eigenwerte $\lambda \in \mathbb{C}$ von f gilt $\|\lambda\| = 1$.

(6 Punkte)

(bitte wenden)

Aufgabe 2.4: Wir betrachten den $\mathbb{R}$-Vektorraum $\mathbb{R}^3$ mit dem Standard-Skalarprodukt und der Standard-Basis

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Eine Drehung um den Vektor e_1 um den Winkel ϕ hat in der Standard-Basis die darstellende Matrix

$$R^x_\phi = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\phi & -\sin\phi \\ 0 & \sin\phi & \cos\phi \end{pmatrix}.$$

Analog hat eine Drehung um den Vektor e_3 um den Winkel ψ in der Standard-Basis die darstellende Matrix

$$R^z_\psi = \begin{pmatrix} \cos\psi & -\sin\psi & 0 \\ \sin\psi & \cos\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Sei nun $D : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ eine beliebige Drehung, und M_D die darstellende Matrix von D. Beachten Sie, dass D eine Drehung ist, also $\det M_D = 1$ gilt. Zeigen Sie:

(i) Es gilt $M_D e_3 = R^z_\psi R^x_\phi e_3$ für geeignete Winkel $\phi \in [0, \pi]$ und $\psi \in [0, 2\pi)$.

(ii) Folgern Sie daraus, dass für geeignete Winkel $\phi \in [0, \pi]$ und $\psi, \theta \in [0, 2\pi)$ gilt
$$M_D = R^z_\psi R^x_\phi R^z_\theta.$$

Die Winkel ϕ, ψ und θ heißen Eulersche Winkel zur Drehung D.

(6 Punkte)